Poštarina plaćena u gotovu

HRVATSKO PRIRODOSLOVNO DRUŠTVO

SOCIETAS SCIENTIARUM NATURALIUM CROATICA

GLASNIK

MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI

PERIODICUM

MATHEMATICO-PHYSICUM ET ASTRONOMICUM

SERIJA II.

T. 2 — 1947. — No. 4—5

Zagreb 1947

Izdaju: Matematičko-fizička sekcija i Astronomska sekcija

S A D R Ž A J

Članke, dopise i sve drugo što se odnosi na **G l a s n i k** treba upućivati Redakciji Glasnika, Zagreb, Marulićev trg 19, Tel. 34-044, 34-045 ili Upravi Prirodoslovnog društva, Ilica 16 III, Tel. 36-585. — Ček Prirodoslovnog društva: 4-90603180.

VLASNIŠTVO I NAKLADA DRUŠTVA.

Godišnja pretplata iznosi Din 120.—, a može se slati na poštanski čekovni račun broj 4-90603180. — Redakcioni odbor: Dr. D. B l a n u š a, D. M. K a t a l i n i ć, Dr. Đ. K u r e p a, Dr. L. R a n d i ć, Dr. I. S u p e k. — Glavni i odgovorni urednik: Dr. Đ u r o K u r e p a. — Štamparski zavod »Ognjen Prica«, Zagreb, Savska cesta broj 31.

Prof. Radovan Vernić

ODREĐIVANJE ORBITA DVOJNIH ZVIJEZDA[1]

Dvojne ili binarne zvijezde jesu parovi zvijezda, koje se kreću jedna oko druge pod utjecajem međusobne privlačne sile. Često zovemo obje zvijezde komponentama dvojnog sustava, napose zovemo sjajniju komponentu primarnom, slabiju sekundarnom. Kod dvojnih zvijezda, koje možemo u dalekozoru rastaviti u par zvijezda, dala su opažanja putanju ili orbitu jedne komponente relativno prema drugoj u obliku elipse, kod koje je primarna komponenta unutar te elipse, ali općenito nije u njenom fokusu. Tu vrijedi — uz neke analitičke pretpostavke — Bertrandov teorem: ako je prividna orbita jedne komponente oko druge elipsa sa primarnom komponentom unutar orbite, ali ne u fokusu, onda za privlačnu silu dobivamo kao jedina dva moguća zakona: sila pada sa kvadratom međusobne udaljenosti (Newtonov zakon gravitacije) ili sila raste sa udaljenošću. Ovaj drugi zakon očito otpada iz fizikalnih razloga, jer bi u beskonačnoj udaljenosti izlazila beskonačno velika sila. Time je stvarno — na osnovi Newtonove mehanike — utvrđen Newtonov zakon kao zakon univerzalne gravitacije. Kod problema dvojnih zvijezda imamo dakle problem dvaju tijela nebeske mehanike, te njegove formule možemo primijeniti kod određivanja orbita dvojnih zvijezda.

Točnu formulaciju problema i karakter metoda određivanja orbita može dati samo opažanje i tehnika opažanja; problem orbita dvojnih zvijezda je toliko ovisan o sredstvima opažanja, da se prema njima raspada u tri metodički sasvim odijeljena dijela: određivanje orbita vizuelnih, spektroskopskih i fotometričkih dvojnih zvijezda.

---

[1] Kolokvij matematičko-fizičke sekcije Hrvatskog prirod. društva održan dne 9. IV. 1947. i 7. V. 1947.

1. VIZUELNE DVOJNE ZVIJEZDE

Već najstarija opažanja prostim okom pokazuju par zvijezda Mizar i Alkor ($\zeta + g$) u Velikom Medvjedu. Poslije otkrića dalekozora, prvi je J. B. Riccioli (1650) vidio Mizar (ζ Ursae maioris) kao dvojnu zvijezdu u dalekozoru (u oznaci Mizar A + B). Od kasnijih je mnogo takovih parova sakupio Chr. Mayer (1779), ali je već 1767 John Michell izrazio misao, da su te dvojne zvijezde ne samo slučajno optički blize, nego i fizički par zvijezda, binarne zvijezde. U sličnom se smislu izrazio J. H. Lambert 1761. No sve su to bila nagađanja koja tek velikim sistematskim radom i preciznim mjerenjima Williama Herschela (1781) dobivaju znanstvenu obradu. 1803 mogao je već W. Herschel proširiti Newtonov zakon gravitacije iz Sunčeva sustava u daleki svemir. Njegova istraživanja nastavio je i produbio J. Herschel, koji je dao i osnovne metode za određivanje orbita dvojnih zvijezda (1833, 1850).

Glavni katalozi dvojnih zvijezda, koje se vide u dalekozoru kao par, dakle vizuelnih dvojnih zvijezda su: W. Struve »Mensurae micrometricae« Petrograd 1837 (znak Σ), O. Struve 1876 (znak $O\Sigma$) i najveći Burnhamov katalog 1906 sa 13655 parova zvijezda (znak β). Kako bi se na neki način odvojile optičke od fizičkih dvojnih zvijezda, postavio je na osnovi starijih radova i pomoću teoretskih razmatranja G. Aitken (The binary stars 1918) statističku definiciju:

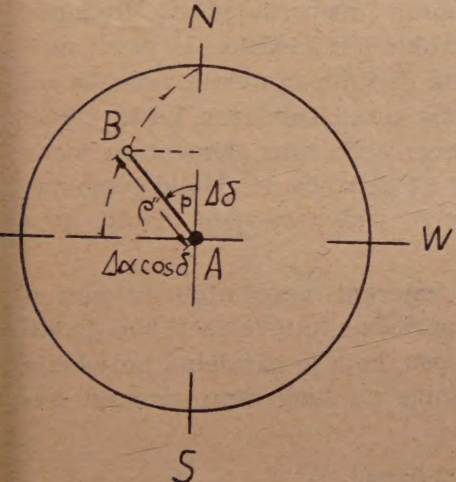
prividna distanca:	40"	20"	10"	5"	3"	1"
prividna veličina:	ispod 2 m	2—4	4—6	6—9	9—11	iznad 11 m

U toj definiciji dolazi do izražaja prirodna činjenica, da će prosječno biti fizički parovi zvijezda prividno to uži, što su dalji od nas, dakle što im je manji prividni sjaj.

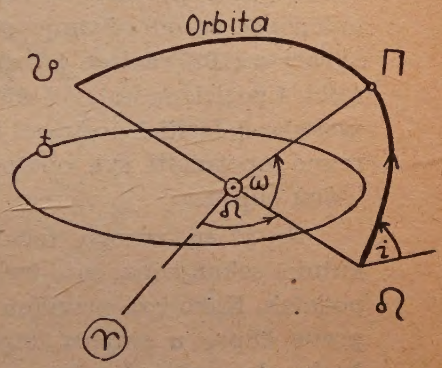
Neka je u slici 1. vidno polje dalekozora predočeno krugom NESW, u sredini je primarna komponenta A, a negdje po strani je sekundarna komponenta B. Njen položaj relativno prema primarnoj određuje se dvjema veličinama: distancom ϱ (u kutnim sekundama) = AB, te kutem pozicije p^0 (u stupnjevima), i to uvijek u smislu NESW. Zatim treba opažanja reducirati: vlastito gibanje zvijezda može se redovno zanemariti,

naravno i razlika u paralaksi; precesija ulazi samo kod kuta pozicije, jer se mijenja deklinacijski krug NAS od kojeg brojimo p. Sve te redukcije pretpostavljamo izvršene.

Orbita tijela u problemu dva tijela određena je sad sa 7 elemenata: 5 geometrijskih a, e, ω; i, $\Omega = \mho \pm 180^{0}$; 2 dinamička T, P. Pri tome znače: a srednju udaljenost obiju tijela t. j. veliku poluos, računatu u kutnim sekundama; e numerički ekscentricitet eliptične orbite; ω pozicioni kut periastrona, računat od čvora; i kut priklona ravnine orbite prema tangentnoj



Sl. 1.



Sl. 2.

ravnini nebeske sfere u A, t. j. ravnini okomitoj na doglednicu u primarnoj komponenti, računat od $0°$—$90°$; Ω pozicioni kut čvora, bilo uzlaznog bilo silaznog, što se ovdje prirodno ne može razlučiti; T vrijeme, kad je sekundarna komponenta u periastronu, dakle najbliža primarnoj; P period ili ophodno vrijeme, kod vizuelnih dvojnih zvijezda u godinama. Kod orbita u Sunčevu sustavu je to nešto drugačije: tu je osnovna, reperna ravnina, prema kojoj računamo položaj ravnine orbite (određen elementima i, Ω), ravnina ekliptike, a početni pravac za računanje kuteva pravac prema proljetnoj točki Υ (slika 2). Oblik i veličina same orbite određena je sa a, e, ω; dok u Sunčevu sustavu dolaze sve vrsti koničnih presjeka, dotle su kod dvoj-

nih zvijezda moguće samo elipse, kao zatvorene krivulje. Napokon u Sunčevu sustavu otpada sedmi element P, koji tu kraj više od dva tijela možemo izračunati iz trećeg Keplerova zakona.

Kod vizuelnih dvojnih zvijezda je orbita uvijek relativna, jer promatramo gibanje slabije komponente prema sjajnijoj; dimenzije su relativnih orbita prema apsolutnima (orbite oko težišta) u omjeru $m_1 + m_2 : m_2 : m_1$. Sva opažanja mjesta od B relativno prema A treba izravnati u glatku krivulju, p r i v i d n u e l i p s u. Matematski je dovoljno za potpuno poznavanje orbitalnog gibanja imati 7 podataka za 7 elemenata; za 5 geometrijskih elemenata od ukupnih 7 na pr. daje H. C. Plummer (MN 60, 1900) projektivnu konstrukciju iz 5 točaka. U prvoj metodi uopće za određivanje orbita dvojnih vizuelnih zvijezda od Savary-a (1827) dolaze 4 poziciona kuta i 3 distance, Encke (1832) treba 4 poziciona kuta i 4 distance. Među tima elementima mora svakako dolaziti 1 pozicioni kut i 1 distanca. Praktički ćemo naravno upotrebiti sva opažanja te izravnavanjem dobiti prividnu elipsu.

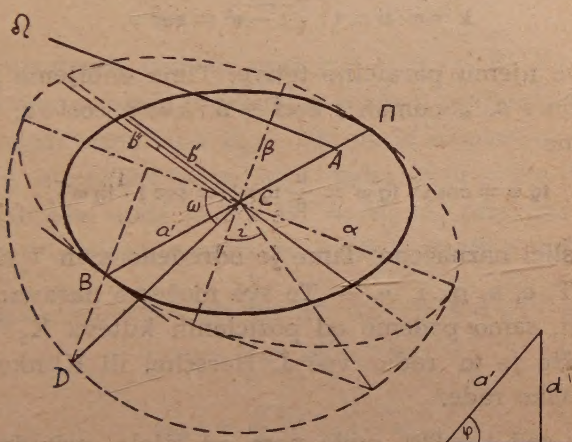
No p^0 su mnogo točnije mjereni nego sitne distance u kutnim sekundama; zato treba pozicione kuteve uzeti kao glavni podatak. Kako i za prividnu elipsu, koja je paralelna projekcija prave elipse u smjeru doglednice na tangentnu ravninu nebeske sfere, vrijedi zakon ploha

$$\varrho^2 \dot{p} = C \text{ (const)}$$

imamo time kontrolu distanca i sredstvo za interpolaciju; uz apscisu t (vrijeme) nanesemo kao ordinate pripadne kutove pozicije p^0, pa interpoliramo glatku krivulju. U času t nam tangenta te krivulje daje $\dot{p}$, pa možemo izračunati iz jednog pouzdanog para ϱ, p konstantu zakona ploha C, a time odrediti ili izravnati i ostale distance. Pouzdanu vrijednost distance dobijemo tvorbom »normalnih vrijednosti« iz niza opažanja. Ovaj postupak je osobito važan kod grafičkih metoda računa orbita vizuelnih dvojnih zvijezda.

Sam račun orbita obavlja se bilo grafički, bilo analitički; često je najzgodnije kombinirati obje metode. Od grafičkih metoda prikazat ću samo dvije: bez sumnje najbržu i najjednostavniju Zwiersovu metodu za opći slučaj, te metodu Henroteau za slučaj $i = 90^0$, kad ostali postupci zakazuju.

Kao u svima metodama, i u Zwiersovoj metodi odredimo najprije ophodno vrijeme P iz opažanja; ako je opažano više ophoda, izravnavanjem, dok u slučaju, da opažanja daju samo jedan luk orbite, treba ophodno vrijeme ekstrapolirati pomoću zakona ploha. Kako je sad prividna elipsa paralelna (ortogonalna) projekcija prave elipse na tangentnu ravninu nebeske sfere, to odatle izvire niz jednostavnih geometrijskih činjenica: središte prave orbite projicira se u središte prividne orbite, tri točke: periastron, primarna komponenta, središte, koje su u



Sl. 3.

pravoj orbiti na jednom pravcu (apsidna linija), i u prividnoj orbiti biti će na jednom pravcu, makar primarna komponenta nije više u fokusu. Ako je dakle (slika 3) C središte, A primarna komponenta, onda pravac CA siječe prividnu elipsu u projekciji periastrona. Interpolacijom među opažana mjesta dobijemo odatle i drugi dinamički element T. Nadalje se paralelnom projekcijom ne mijenjaju omjeri dužina (afinitet) pa je odmah $e = \mathrm{CA} : a' = d : a' = \sin \varphi$. To možemo vrlo lako konstruirati. Pri tome znademo da je $a' = a. \cos (i)$. Presječnica ravninâ prave i prividne orbite je čvorna crta, pa se prema tome sve tetive njoj paralelne projiciraju u svojoj pravoj veličini, i obratno: ako znademo, da se neka tetiva projicira u pravoj veličini, ona je paralelna čvornoj crti, koja ide kroz primarnu komponentu. To svojstvo iskorištava Zwiers u bitnoj ideji svoje metode: krug, koji dira pravu elipsu, u krajevima

velike osi (apsidne linije), projicira se u elipsu koju Zwiers zove »pomoćna elipsa«; velika os te elipse je originalni dijametar 2a, a kako se on projicira u svojoj pravoj veličini, to je paralela toj velikoj osi pomoćne elipse kroz primarnu komponentu A upravo tražena čvorna crta. Treba samo konstruirati pomoćnu elipsu: neka su joj poluosi α, β ($\alpha = a$); a', b' u prividnoj elipsi su par konjugiranih dijametara te elipse, jer su paralelna projekcija para osiju prave elipse; to će isto vrijediti i za pomoćnu elipsu, samo treba poludijametar b' produžiti u omjeru

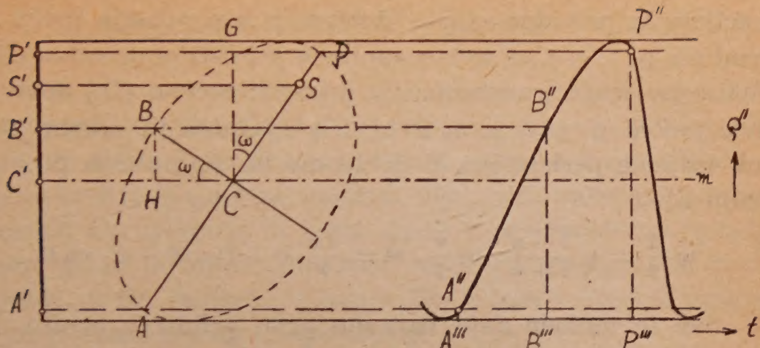
$$k = a : b = 1 : \sqrt{1 - e^2} = \sec\varphi,$$

a tako i sve njemu paralelne tetive. Time dobijemo pomoćnu elipsu, dakle i α, a odmah i $\cos i = \beta : \alpha = a.\cos i : a$. Napokon konstruiramo

$$\operatorname{tg}\omega = \cos i \cdot \operatorname{tg}\omega' = \frac{\alpha}{\beta}\operatorname{tg}\omega' \;(= \sec i \cdot \operatorname{tg}\omega'),$$

kako je u slici naznačeno. Time je određeno svih 7 elemenata redom: P, T, e, a, Ω, i, ω. — To sve možemo naravno i analitički pratiti, samo pođemo od pozicionih kuteva X_1 X_2 poluosiju, kao što je to radio već J. Herschel ili Klinkerfues. U praksi baš tako rade.

Ako je sad $i = 90^0$, onda nam od cijele prividne elipse ostane samo jedna dužina, koju sekundarna komponenta dva puta prođe tokom ophoda. Pozicioni kut je uvijek isti $p = p_0$, što je ujedno i pozicioni kut čvora Ω. Imamo dakle odmah dva elementa Ω P, a kao prije, čim odredimo mjesto periastrona, dobit ćemo T. Za taj slučaj postoji vrlo jednostavna metoda Henroteau, koju on primjenjuje čak u općem slučaju tako, da čitavu prividnu orbitu projicira u čvornu crtu (slika 4). Povućemo okomito na pravac orbite t—os kao os apscisa, a kao ordinate nad njom nanesemo mjerene distance (naravno izravnate), te dobijemo krivulju za interpoliranje distanca. Sad odredimo periastron Schwarzschildovom metodom: precrtamo tu krivulju na prozirni papir, okrenemo oko medijane *m*, i pomaknemo za P/2 natrag. Sjecišta obiju krivulja su točke periastrona i apastrona P'', A'', jer su ophodna vremena od P do A u oba smjera jednaka P/2. Sad odredimo apscisu P''' = *T*, te projiciramo P'' na orbitu u P'; ako je C' projekcija središta, S' projekcija pri-



Sl. 4.

marne komponente, onda je opet $e = C'S' : C'P'$. Za dalje elemente trebamo krajnju točku male osi B, u projekciji B'. Za nju je ekscentrična anomalija $E_b = 90^0$, pa iz Keplerove jednadžbe $M = E - e. \sin E$ dobijemo M_b; neka je $n = 2\pi : P$ srednje godišnje gibanje, onda je $P''' B''' = M_b : n$; pripadna točka na krivulji je B'', njena projekcija B'. Sad iz slike vidimo da je

$$\operatorname{ctg} \omega = \operatorname{ctg} HCB = HC : HB, \; HC : GC = b : a = \sqrt{1 - e^2},$$

$$GC = P'C', \; HB = C'B',$$

dakle je

$$\operatorname{ctg} \omega = \frac{P'C'}{B'C'} \cdot \sqrt{1 - e^2};$$

napokon je $a = P'C' \cdot \sec \omega$.

Što se tiče čisto analitičkih metoda, tu je najviše u upotrebi Seeligerova metoda (1872. i kasnije). Prvo nađemo iz niza opažanja metodom najmanjih kvadrata jednadžbu elipse projekcije

$$\beta \cdot \xi^2 + \gamma \cdot \eta^2 + 2\delta \cdot \xi\eta + 2\varepsilon \cdot \xi + 2\zeta \cdot \eta - 1 = 0.$$

Ta jednadžba prividne elipse je ujedno jednadžba cilindra projekcije, kojemu je os doglednica. Sad ravninu prividne elipse zakrenemo najprije za kut Ω, čime se dovode u vezu ξ, η sa Ω; zatim ostavimo ξ, η na cilindru istima, a sve aplikate promijenimo zakretom ravnine za kut priklona i, čime dobivamo vezu koordinata i elementa i; no ta nova presječna elipsa našeg cilindra je već prava orbita. Izrazimo li njenu jednadžbu $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$ u novom sustavu, kojemu je ishodište u fokusu, pa isporedimo s jednadžbom, koju smo dobili transfor-

macijom iz prividne elipse, dobivamo niz relacija među elementima Ω, i; a, e, ω; te konstantama jednadžbe prividne elipse. Nakon izvjesnih transformacija (uporedi recimo (8)!) dobivamo onda redom Ω, i, e, ω, a; P opet iz opažanja ili zakona ploha, dok vrijeme periastrona T dobivamo po formulama problema dvaju tijela

$$\operatorname{tg} \frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \cdot \operatorname{tg} \frac{v}{2}, \quad M = \frac{2\pi}{P}(t-T) = E - e \cdot \sin E.$$

Sve te metode daju naravnu prvu približnu orbitu. Ako točnost opažanja dopušta, možemo kasnije preći na točniji račun definitivne orbite pomoću formula za diferencijalne korekcije elemenata, kako ih je na pr. dao Marth (4).

Ekstremni primjeri u pogledu perioda P su: σ_2 Ursae mai. sa P = 10850 god., te δ Equulei sa P = 5, 7 god. Međutim je ta granica prema dolje potisnuta upotrebom interferometra (Fizeau 1868, A. A. Michelson 1890, Schwarzschild 1896). Kao primjer imamo Capellu (α Aurigae); nju su već prije poznavali kao spektroskopsku dvojnu zvijezdu razmjerno dugog perioda P = 104 dana, pa se pokušavalo i direktno vizuelno dokazati dvojni karakter, na što su upozorili Campbell i Nevall 1899. Dyson i Lewis su u Greenwichu 1900 na velikom refraktoru vidjeli tu zvijezdu nešto produženu, ali su produženje ocijenili manjim od 0,1''. Na Mount Wilsonu je Michelsonovim interferometrom J. C. Anderson 1919—1920, te P. W. Merrill 1920—1921 mjerio njenu orbitu, te su dobili: P = 104,022 dana, e = 0,0086, a = 0,''05360, i = 41°,08. Kako je ta zvijezda ujedno spektroskopska, dobiveni su daljnji podaci o masama m_1 = 4,2 m_2 = 3,3 (jedinica je masa Sunca). Obje komponente su opet spektroskopske dvojne zvijezde. Još je F. G. Pease mjerio 1925 ζ_1 Ursae Mai. (Mizar A) sa distancom 0,''01.

Poseban problem je određivanje orbita dvojnih zvijezda sa nevidljivim pratiocem, kod kojih se dakle na dvojni karakter zaključuje iz promjenljivog vlastitog gibanja; takovi su tipični primjeri Sirius i Procyon. Elemente dvojnog sustava Sirius izračunali su računski već Bessel (AN 22, 1848), pa Peters (AN 32, 1851), Auwers 1862, a tek 1862 otkrio je velikim dalekozorom Alvan Clark Siriusovog pratioca. Ta je zvijezda osobita radi svoje velike gustoće (bijeli patuljak).

2. SPEKTROSKOPSKE DVOJNE ZVIJEZDE.

Ako je u paru zvijezda jedna zvijezda drugoj toliko blizu, da ih ne možemo rastaviti u dalekozoru, ipak im se orbitalno gibanje može očitovati u njihovu spektru u pomacima spektralnih linija na crvenu ili ljubičastu stranu, već prema tome, da li se zvijezda od nas udaljuje ili nama približava (Dopplerov princip). Prema tome je osnov: mjerenje radijalne komponente brzine zvijezda, t. zv. radijalno gibanje. To je ujedno jedini podatak, kojim u ovom slučaju raspolažemo.

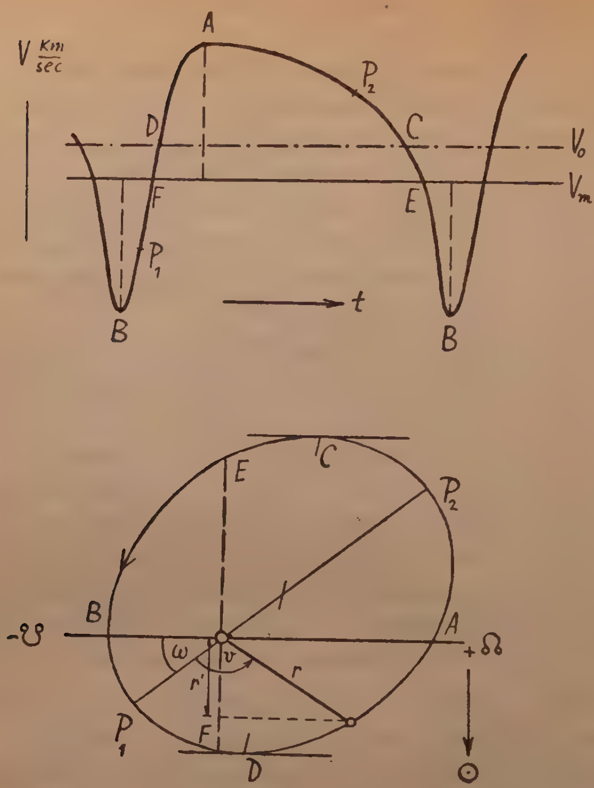
Prva određivanja radijalnih brzina potječu od W. Hugginsa (1867—8), zatim slijede H. C. Vogel i Scheiner 1888, Vogel 1889—90 za β Pers (Algol) i α Virg (Spica), H. Deslandres (Meudon 1890). E. Pickering je od 1886 do 1890 mjerio ζ_1 UMaj (Mizar A) s elementima $P = 20{,}5$ d, $e = 0{,}52$. Sva su ta određivanja bila još dosta nesigurna. Iste je godine Keeler na Lick opservatoriju (1890) dobio prve sigurne vizuelne radijalne brzine, a Vogel (1892) fotografski. Danas je točnost određivanja radijalnih brzina dosta velika prema ostalim mjerenjima kod dvojnih zvijezda (na nekoliko km/sec točno).

Opažana radijalna gibanja, koja svojom pravilnošću upućuju na orbitalna gibanja (periodicitet u pravilnom slijedu!), treba najprije reducirati za iznos dnevnog i godišnjeg gibanja Zemlje; to uzimamo da je gotovo. Gibanje dvaju tijela zbiva se jednako bilo da težište sustava miruje, bilo da se jednoliko pravocrtno giba, a to možemo uvijek pretpostaviti, jer su kod spektroskopskih dvojnih zvijezda ophodi kratki, pa se prostorno gibanje zvijezda može uzeti jednoliko u pravcu. Neka je dakle radijalna brzina težišta para zvijezda V_0; jedina koordinata zvijezde, koju opažamo posredno, jest položaj u pravcu doglednice, recimo z (raste s udaljenošću). Onda je relativna brzina komponente, kojoj opažamo gibanje, prema težištu

$$V - V_0 = dz/dt \quad \text{ili} \quad V = V_0 + dz/dt.$$

Sad znademo, da će zvijezda nakon punog perioda doći u isti položaj, dakle će biti (1. Rambautov uvjet)

$$z_{t+P} - z_t = \int_t^{t+P} \dot{z}dt = 0, \qquad \int_t^{t+P} (V - V_0)\, dt = 0, \qquad V_0 = \frac{1}{P}\int_t^{t+P} V dt$$



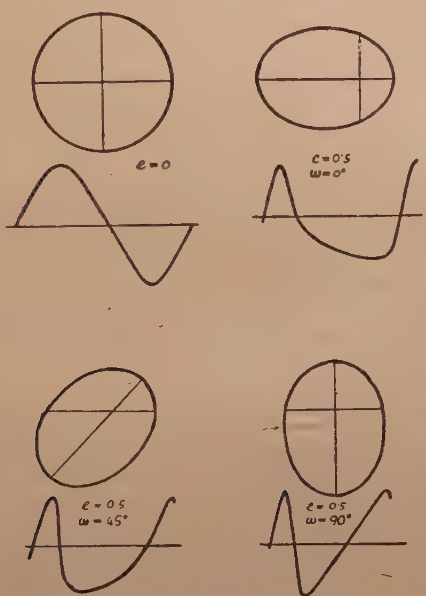
Sl. 5.

Taj pak integral izračunamo numerički, grafički ili planimetrom; pravac V_0 daje nam simetralu površine »krivulje brzina«: nanesemo uz apscisu *t* (vrijeme) kao ordinate sve mjerene radijalne brzine V. V_0 je prvi elemenat orbite. *P* je prividni period u danima, pravi je period

$$P_0 = P : (1 + V/c)$$

ali je ta korekcija sasvim neznatna i uvijek ju možemo zanemariti. U slici 5. prikazana je veza gibanja u orbiti sa krivuljom radijalnih brzina: V_m je srednja vrijednost ekstrema krivulje, t. j. medijana maksimalne i minimalne brzine; prirodno je da je ovdje pozicioni kut čvorne crte ☊ neodređen, samo znamo, da je ona okomita na doglednici. Neka je AB čvorna crta, P_1 i P_2 periastron i apastron, C, D dirališta tangenata na

orbitu okomitih na doglednici, t. j. paralelnih sa čvornom crtom. Uvedemo li prema slici »argument širine« (dužinu u orbiti) $u = \omega + v$, onda su osobite točke orbite karakterizirane slijedećim vrijednostima: čvorovi B, A : $u = \omega + v = 0^0, 180^0$; apside P_1, P_2 : $v = 0^0, 180^0$. Te će nam četiri točke trebati za



Sl. 6.

određivanje elemenata orbite. Da je doista u čvorovima najveća radijalna brzina, vidjet ćemo kasnije iz formule za brzinu, ako u nju uvrstimo $u = 0^0, 180^0$. U slici 6. prikazana je ovisnost oblika krivulje brzina o položaju i obliku orbite za neke osobite slučajeve. — Opet vidimo, da period *P* dobivamo neposredno iz opažane krivulje brzina.

Temelj računa orbita kod spektroskopskih dvojnih zvijezda je formula za radijalnu brzinu V. Prvi ju je izveo Rambaut 1891; njegovu je metodu znatno i bitno pojednostavnio i usavršio R. Lehmann-Filhés, čija je metoda danas općenito u upotrebi. Prema slici 5. vidimo, da je projekcija radijavektora u doglednicu (ta jedino dolazi u obzir)

$$r' = r \cdot \cos(u - 90^0) = r \cdot \sin(\omega + v),$$
$$z = r' \cdot \cos(90^0 - i) = r \cdot \sin(\omega + v) \sin i$$

budući da je kut doglednice i orbite komplement kutu tangentne ravnine i orbite i. Odavle je dalje traženi izraz za brzinu $dz/dt = \dot{z}$

$$\dot{z} = \dot{r} \cdot \sin(\omega + v) \sin i + r \cdot \cos(\omega + v) \sin i \cdot \dot{v}$$

Po formulama za problem dva tijela je zakon ploha

$$r^2 \cdot \dot{v} = na^2 \sqrt{1 - e^2} \quad (n = 2\pi : P \text{ srednje dnevno gibanje}),$$

a orbita

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos v}$$

Time nalazimo:

$$\dot{r} = \frac{a(1 - e^2)}{(1 + e\cos v)^2} \cdot e \sin v \cdot \dot{v} = \frac{r^2 e \cdot \sin v}{a(1 - e^2)} \cdot \dot{v} = \frac{e \cdot \sin v}{a(1 - e^2)} \cdot r^2 \dot{v}$$

ili

$$\dot{r} = \frac{na}{\sqrt{1 - e^2}} \cdot e \cdot \sin v;$$

nadalje u drugom članu:

$$r\dot{v} = \frac{1}{r} \cdot r^2 \dot{v} = \frac{(1 + e\cos v)}{a(1 - e^2)} \cdot na^2 \sqrt{1 - e^2} = \frac{na(1 + e\cos v)}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

Dakle imamo

$$\dot{z} = \frac{na \cdot \sin i}{\sqrt{1 - e^2}} \cdot e \cdot \sin(\omega + v) \sin v + \frac{na \cdot \sin i}{\sqrt{1 - e^2}} \cdot (1 + e \cdot \cos v) \cos(\omega + v);$$

izlučimo faktor »amplitudu«

$$K = \frac{na \cdot \sin i}{\sqrt{1 - e^2}}$$

i stegnemo, te dobijemo konačno formulu za brzinu

$$\dot{z} = \frac{na \cdot \sin i}{\sqrt{1 - e^2}} [\cos(\omega + v) + e \cdot \cos \omega]$$

ili za relativnu brzinu

$$V = V_0 + K(\cos u + e \cdot \cos \omega).$$

Kako imamo samo kombinaciju a. sin$i$, to su nam dakle elementi spektroskopske orbite: P, T, ω, e, a · sin$i$ uz K, V_0, a mogu se dalje dobiti i relacije za ocjenu masa, gdje dolazi $\sin^3 i$ i t. d. Sad smo već vidjeli kako ćemo naći P, V_0; čim pomoću ω

odredimo periastron, imamo u apscisi na krivulji brzina T, koje se ovdje računa u danima (Julijanskim) od čvora, t. j. položaja ekstremne brzine. Doista, uvrstimo li u našu formulu za V, $u = 0^0, 180^0$, dobivamo ekstremne vrijednosti

$$V_{max} = V_0 + K + K e \cos \omega, \quad V_{min} = V_0 - K + K e \cos \omega, \quad 2K = V_{max} - V_{min}$$

dakle dobivamo amplitudu

$$K = (V_{max} - V_{min}) : 2$$

Uvedemo li dalje srednju brzinu

$$V_m = (V_{max} + V_{min}) : 2 = V_0 + K e \cos \omega$$

možemo pisati formulu za brzinu

$$V = V_m + K \cos u.$$

Sad uvrstimo vrijednosti za apside $v = 0^0, 180^0$:

$$V_{peri} = V_m + K \cos \omega, \quad V_{apo} = V_m - K \cos \omega, \quad 2V_m = V_{peri} + V_{apo};$$

ako dakle nađemo V_{peri} i V_{apo} pomakom za P/2 i okretom oko medijane (vidi str. 150), onda nam razmak tih točaka na krivulji brzina od medijane V_m daje $K \cdot \cos \omega$, dakle sam ω; napokon iz definicije od V_m dobijemo $K e \cos \omega$, dakle e, a time iz K i kombinaciju $a \cdot \sin i$. Time je problem riješen.

Još ćemo dodati par napomena:

Da određenje od ω bude jednoznačno, uzmemo u obzir, da je u periastronu najveća akceleracija, što se vidi odmah, ako deriviramo formulu za brzinu, dakle tangenta na krivulju brzinâ najstrmija.

Za bolji pregled računa uvedemo originalne oznake Lehmann-Filhésa

$$A = K(1 + e \cos \omega) = V_{max} - V_0, \quad B = K(1 - e \cos \omega) = -(V_{min} - V_0);$$

time izlazi:

$$2K = A + B, \quad K e \cos \omega = (A - B) : 2, \quad e \cos \omega = (A - B) : (A + B),$$

$$V = V_0 + \frac{A - B}{2} + \frac{A + B}{2} \cos(\omega + v);$$

ova je formula zgodna za računanje efemerida. On je još uveo neke druge oznake, koje nam nisu važne, jer nam se radi samo o principu.

Površine krivulje brzinâ od čvora do V_0, pa dalje do slijedećeg čvora su također jednake (2. Rambautov uvjet): $V - V_0 = \dot{z}$, pa je

$$\int_B^A \dot{z} dt = z_A - z_B = 0,$$

a to smo tvrdili.

To se svojstvo također može iskoristiti za računanje orbita.

Ako imamo dva spektra, nalazimo orbitalno gibanje oko zajedničkog težišta V_1 i V_2; onda je relativno gibanje dano formulom

$$V = V_1 - V_2 = \frac{n (a_1 + a_2) \sin i}{\sqrt{1 - e^2}} (\cos u + e \cos \omega).$$

Dakle otpada V_0, a dolazi kombinacija $(a_1 + a_2) \sin i$. Ostalo je isto.

Ekstremni su primjeri spektroskopskih dvojnih zvijezda:

1) W UMaj:

$P = 0{,}334$ d, $K_1 = 134$ km/sec, $K_2 = 188$ km/sec, $e = 0{,}0$, $a_1 \sin i = 0{,}88$ radija Sunca, $a_2 \sin i = 1{,}24$ radija Sunca, $(a_1 + a_2) \sin i = 2{,}12$ radija Sunca.

(zvijezde β Ceph sa $P = 0{,}19$ d, te β CMaj sa $P = 0{,}25$ d nisu još utvrđene kao dvojne, mogle bi biti jednostavne, a promjenljive)

2) BD + 6°1309 (J. S. Plaskett MN 82, 1923):

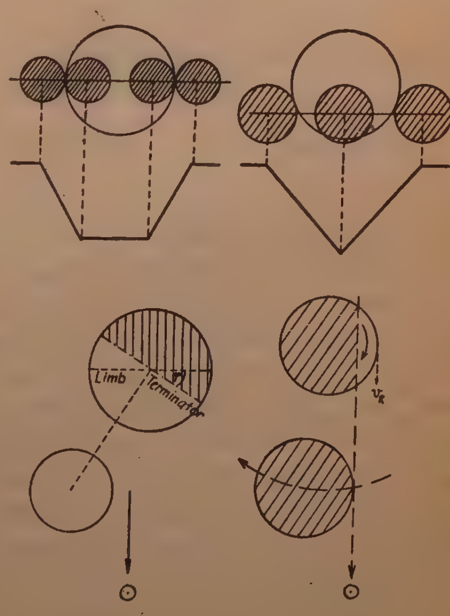
$P = 14{,}4$ d, Spektar Oe 5 $K_1 = 206{,}4$ km/sec $K_2 = 246{,}7$ km/sec, $V_0 = + 24{,}0$ km/sec, $m_1 \sin^3 i = 75{,}6$ masa Sunca, $m_2 \sin^3 i = 63{,}3$ masa Sunca. To je najmasivnija zvijezda dosad.

Udaljenost joj je procijenjena na 10 000 god. svj.

Ako je spektroskopska dvojna zvijezda ujedno vizuelna, onda iz asini, a'', i° dobivamo a (km) te time i paralaksu $\pi'' = a''/a$ (km), na pr. Capella. Onda naravno dobivamo prave dimenzije sustava. Neke uske vizuelne dvojne zvijezde postanu u periastronu i u konjukciji spektroskopske, pa dobivamo vrijedne podatke; naravno za to treba točne V; početkom 20. vijeka osobito se tu istakao Aristarh Belopolsky u Pulkovu.

3. FOTOMETRIČKE DVOJNE ZVIJEZDE

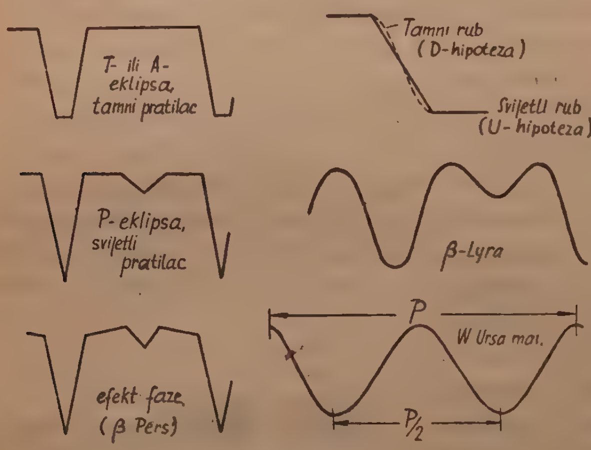
Najstariji i najbolje proučeni predstavnik te vrste dvojnih zvijezda je Algol (β Pers). Već 1667 otkrio je Montanari, da Algol mijenja sjaj, i to pravilno. No tek 1782 proučio je temeljito tu zvijezdu gluhonijemi Goodricke (on je otkrio 1784 β Lyra, δ Ceph) i već tada je postavio ideju dvojnog sustava, u kojem dolazi do eklipsa, pomračenja pojedinih komponenata. Opet je za Algol dao E. Pickering 1881 prvu metodu približnog računa orbita. On je pretpostavio anularnu (prstenastu) eklipsu i relativno tamnog pratioca, t. j. kad sjajnija komponenta dođe pred pratioca, ne opaža se nikakov pad ukupnog sjaja. 1889 je Vogel mogao spektroskopski utvrditi orbitalno gibanje kod Algola, 1892 Pickering, a osobito točna mjerenja izvršio je Belopolsky 1906—8. Kad je J. Stebbins 1909—10 primijenio svoj novi fotometrički instrument, selenovu stanicu, na ispitivanje promjena sjaja kod Algola, našao je slabi, ali nesumnjivi sekundarni minimum, što je pokazalo, da se sekundarna komponenta ne može uzeti tamnom. 1919—21 mjerio je Stebbins tu zvijezdu još osjetljivijim instrumentom, fotoelektričnom stanicom, te je ustanovio još dva efekta na ispravljenoj krivulji sjaja: t. zv. efekt faze i eliptičnosti komponenta; o tome ćemo niže više govoriti. Spektroskopsku orbitu točno je ponovno računao D. B. Mc Laughlin 1924, a 1934 otkrio je efekt rotacije primarne komponente (sl. 7); time dobivamo apsolutne dimenzije sustava i obiju komponenata.



Sl. 7.

Kod fotometričkih ili eklipsnih dvojnih zvijezda daju nam

opažanja krivulju sjaja: nanesemo li uz vrijeme kao apscisu za svaki čas opažani sjaj kao ordinatu, dobijemo pravilnu krivulju, čiji su glavni oblici prikazani u slikama 7—8. Ako su obje komponente kružne ploče jednolikog sjaja, onda će izvan eklipse biti krivulja sjaja pravac paralelan t-osi, od momenta 1. kontakta sjaj pada stalno do minimuma; sad u slučaju totalne (T) ili anularne (A) eklipse ostane sjaj neko vrijeme u minimumu konstantan, a T-eklipsa ili A-eklipsa nastupa prema tome, da li je pomračena (zastrta) manja ili veća komponenta (slika 7 gore); u slučaju parcijalne pomrčine (P) minimum je oštar,



Sl. 8.

nema konstantne faze u minimumu. Iz statističke diskusije i radi kozmogonskih razloga uzima se, da se u ovakovim uskim dvojnim sustavima rotacija komponenata i revolucija jedne oko druge vrši u istom smislu; onda će u času blizu 2. i 3. kontakta radijalna komponenta brzine rotacije pomračene komponente dati jedan efekt u krivulji brzina (spektroskopskoj krivulji!), kako je to prikazano na slici 7 dolje desno, a specijalno za krivulju brzina Algola u slici 13. Napokon može međusobna rasvjeta komponenata dati efekt faze, kako je to prikazano u slici 7 dolje lijevo; taj će se u fotometričkoj krivulji sjaja očitovati time, što sjaj izvan eklipse nije konstantan, nego stalno raste do drugog minimuma (slika 8). Već se iz slike 7 vidi, da nam trajanje konstantne faze minimuma daje mjeru za odnos dijametara komponenata, naravno mjereno u vremenu.

Slučaj, koji smo dosad razmatrali, jednoliko svijetle ploče zvijezda, zove Russell U-hipotezom (uniform hypothesis); no već kod Sunca je poznata pojava pada sjaja prema rubu (limbu), te iz termodinamičkih razloga treba to isto pretpostavljati kod svih zvijezda, samo što nam osjetljivost aparata većinom nije dovoljna, da taj efekt pokaže. On će se očitovati u polaganijem početku pada sjaja kod eklipse, zatim u naglijem padu i opet polaganijem svršetku (slika 8). No opet iz dinamičkih razloga mora doći do slučajeva, u kojem zvijezde bitno odstupaju od kružnog oblika, gdje su dakle elipsoidi; tu će krivulja sjaja biti uopće bez stalne faze, za vrijeme i izvan eklipse (slika 8). Napokon su u slici 8 prikazane i neke kombinacije tih slučajeva, napose slučaj (W UMaj), kad su obje eliptične komponente jednake.

Sam račun orbita tih dvojnih zvijezda zadavao je toliko teškoća, da je Bauschinger na kraju svog poznatog djela o računu orbita rekao, kako nije vjerojatno, da će se zamršeni odnosi u ovom slučaju ikad moći samo po krivulji sjaja raščistiti. Taj citat je motto radnje H. N. Russella (11): On the determination of the orbital elements of eclipsing variable stars; zatim (12), te sa H. Shapley-em u (13): On the darkening at the limb in eclipsing variables. Tu je Russell riješio problem računa orbita fotometričkih ili eklipsnih dvojnih zvijezda na najopćenitiji mogući način, prodiskutiravši i sve gore navedene osobite slučajeve.

Stalne su oznake u Russellovim računima: (za indeks $i = 1, 2$)

$S =$ komponenta dvojnog sustava
$r =$ polumjer zvijezde ($r_1 > r_2$)
$l =$ sjaj u ma koji čas
$I =$ plošni sjaj
$L =$ sjaj izvan eklipse
$\lambda =$ minimum sjaja (jedinica sjaja je $L_1 + L_2 = 1$)
$\alpha =$ gubitak sjaja (u dijelovima površine od S_2)
$\alpha_1 =$ maksimalni gubitak sjaja
$\delta =$ prividni razmak centara (u jedinicama poluosi orbite a)
$i =$ nagib orbite prema sferi
$P =$ period revolucije (ophodno vrijeme)
$\Theta = (2\pi : P). t =$ prava dužina u orbiti, za kružne orbite; inače je to $= M$

e = ekscentricitet orbite
ε = ekscentricitet meridionalnog presjeka eliptične zvijezde
$z = \varepsilon^2 \cdot \sin^2 i$; $z = 5/4 \cdot Z - 5/28 \cdot Z^2$

Stavimo još $r_2 = k \cdot r_1$, $k = r_2 : r_1$, $o < k < 1$.

Sad su elementi eliptične orbite: a, e, ω, i, P, t_0 (vrijeme glavne konjunkcije = minimuma).

a) Sferne zvijezde, kružne orbite, U-hipoteza.

U ovom osnovnom slučaju prelaze gornji eliptični elementi u slijedeće kružne elemente: i, r_1, L_1 k, P, t_0. Iz krivulje sjaja odredimo uvijek direktno P i t_0. Za određivanje ostalih elemenata treba krivulju sjaja, koju opažanja daju u promjenama prividne veličine m, pretvoriti u pravu krivulju sjaja, po poznatoj formuli

$$l : l_0 = 2{,}512^{m_0 - m}, \ \log l - \log l_0 = 0{,}4\,(m_0 - m).$$

Ovom je jednadžbom izražen Fechnerov psihofizički zakon (Fechner 1858), koji je već prije za sjaj zvijezda našao Pogson (1856), a 1857 uveo t. zv. Pogsonovu konstantu 2,512 (točnije 2,511 866 sa dekadskim logaritmom 0,4), da se dobije veza sa starim ocjenjivanjima još od Ptolemeja uz zgodan logaritam. Kako je u Russellovim oznakama $l_0 = L_1 + L_2 = 1$, to ostane ovdje samo

$$\log l = 0{,}4\,(m_0 - m).$$

Odnos površina zvijezda (vidljivih ploča) je $S_1 : S_2 = 1 : k^2$, $S_2 = k^2 \cdot S_1$, dakle i $L_2 = k^2 \cdot L_1$. Neka je (slika 9) zastrti dio α, ako je cijela površina od S_2 uzeta kao jedinica. Onda od ukupnog sjaja $1 = L_1 + L_2$ manjka α-ti dio

$$l_1 = 1 - \alpha L_2, \ \text{za } P/2 \text{ kasnije } \ l_2 = 1 - k^2 \alpha L_1.$$

Pišemo li obje ove jednadžbe: $\alpha L_2 = 1 - l_1$, $\alpha L_1 = (1 - l_2) : k^2$ i zbrojimo, dobivamo osnovnu formulu

$$\alpha = 1 - l_1 + (1 - l_2) : k^2$$

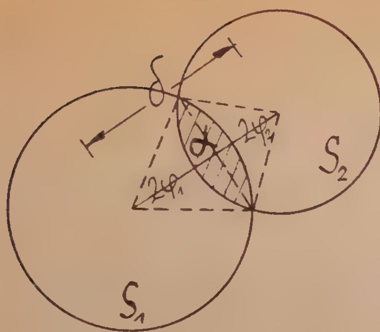
Tu su sad moguće ove kombinacije:

I. Konstantna faza u minimumu 1) 2 minima; 2) 1 minimum
II. Nema konstantne faze 1) 2 minima; 2) 1 minimum.

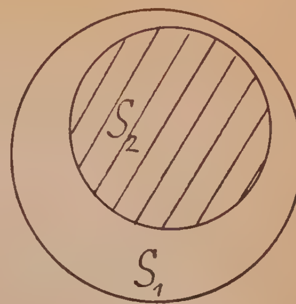
U slučaju I/1 imamo jednu T-eklipsu (zastrta S_2) sa minimumom λ_1 i jednu A-eklipsu (zastrta S_1) sa minimumom λ_2. U minimumu je $\alpha = 1$, te imamo

$$\lambda_2 = 1 - k^2 \lambda_1, \ k^2 = (1 - \lambda_2) : \lambda_1, \ L_1 = 1 - L_2 = \lambda_1.$$

Treba još odrediti r_1, i.



Sl. 9.



Sl. 10.

U slučaju I/2 imamo tamni pratilac, te T-eklipsu ili A-eklipsu; u svakom slučaju je $\lambda = 1 - L_2$, $L_2 = 1 - \lambda = k^2 L_1$. Treba još odrediti r_1, i, k.

U slučaju II/1 je

$$\alpha_0 = \alpha_{max}, \quad \alpha_0 = 1 - \lambda_1 + (1 - \lambda_2) : k^2; \text{ iz } \lambda_1 = 1 - \alpha_0 L_2 \text{ je } \alpha_0 = (1 - \lambda_1) : L_2.$$

Dakle treba ovdje odrediti $\alpha_0, \cancel{r_1,}\ i, k$.

U slučaju II/2 treba odrediti iste elemente, samo otpada prva jednadžba za α_0, jer tu nema λ_2. Taj slučaj je općenito neodređen.

Rješenje problema za slučaj I:

Uzmimo najprije teži slučaj I/2. Ako dužine u orbiti računamo od konjunkcije t_0 i centra veće zvijezde, imamo

$$\Theta = \frac{2\pi}{P}(t - t_0),$$

dok nam

$$\alpha = \frac{1 - l_1}{L_2}, \quad L_2 = 1 - \lambda$$

daje

$$\alpha = \frac{1 - l}{1 - \lambda}$$

Nađemo l, λ iz krivulje sjaja kao funkcije od t, t. j. od Θ. Time je i α izražen kao funkcija od Θ.

Uvedemo nadalje prema slici 9 centralnu distancu δ, jer ona u omjeru prema r_1 (a time preko k i r_2) određuje pomračeni dio α. S jedne je strane δ hipotenuza u pravokutnom trokutu, kojemu su katete projekcija poluosi $a = 1$ na tangentnu

ravninu $a \cdot \cos(90^\circ - \Theta) = a \cdot \sin \Theta$, te projekcija normalne komponente $a \cdot \cos \Theta$ na tangentnu ravninu $a \cdot \cos \Theta \cdot \cos i$, dakle:

$$\delta^2 = \sin^2 \Theta + \cos^2 \Theta \cdot \cos^2 i, \quad \text{ili} \quad \delta^2 = \cos^2 i + \sin^2 i \cdot \sin^2 \Theta$$

(Pickeringova formula). S druge je strane prema slici 9:

$$S_2 = \pi r_2^2 = \pi k^2 r_1^2, \quad \alpha S_2 = \alpha \pi k^2 r_1^2 = (\text{sektor - trokut})_1 + (\text{sektor - trokut})_2$$

odakle lako nađemo

$$\alpha = \frac{1}{2\pi k^2} \left[(2\varphi_1 - \sin 2\varphi_1) + k^2 (2\varphi_2 - \sin 2\varphi_2)\right]$$

dakle α kao funkciju kuteva φ i k. Tu je i

$$\delta = r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos \varphi_2 = r_1 (\cos \varphi_1 + k \cos \varphi_2)$$

dok kosinusov poučak daje

$$\varphi_i = \operatorname{arc} \cos \frac{r_i^2 + \delta^2 - r_k^2}{2 r_i \delta} \qquad (i \neq k = 1, 2)$$

Radi $r_2 : r_1 = k$ vidimo da je α funkcija od k, $\delta : r_1$ ili inverzno:

$$\frac{\delta}{r_1} = \varphi(k, \alpha) \equiv 1 + k \cdot p(k, \alpha)$$

U Russellovoj tablici 1. tabulirane su vrijednosti od p za razne k, α.

Sad iz (reducirane) krivulje sjaja uzmemo tri para vrijednosti $\frac{\alpha_1}{\Theta_1} \frac{\alpha_2}{\Theta_2} \frac{\alpha_3}{\Theta_3}$, kod čega Russell uzima fiksno $\alpha_2 = 0{,}6$, $\alpha_3 = 0{,}9$. Zatim eliminiramo

$$\frac{\cos^2 i}{r_1^2}, \ \frac{\sin^2 i}{r_1^2} \ \text{iz} \ \frac{\delta^2}{r_1^2} = \frac{\cos^2 i}{r_1^2} + \frac{\sin^2 i}{r_1^2} \cdot \sin^2 \Theta_v = \varphi^2 (k_1 \alpha_v)$$

za $v = 1, 2, 3$. Eliminanta je

$$\begin{vmatrix} \varphi^2 (k, \alpha_1) & \sin^2 \Theta_1 & 1 \\ \varphi^2 (k, \alpha_2) & \sin^2 \Theta_2 & 1 \\ \varphi^2 (k, \alpha_3) & \sin^2 \Theta_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

odakle slijedi

$$(\sin^2 \Theta_1 - \sin^2 \Theta_2) : (\sin^2 \Theta_2 - \sin^2 \Theta_3) = (\varphi_1^2 - \varphi_2^2) : (\varphi_2^2 - \varphi_3^2).$$

Ako tu stavimo:

$$A = \sin^2 \Theta_2, \quad B = \sin^2 \Theta_2 - \sin^2 \Theta_3, \quad \psi(k, \alpha_1) = \frac{\varphi^2 (k \alpha_1) - \varphi^2 (k \alpha_2)}{\varphi^2 (k \alpha_2) - \varphi^2 (k \alpha_3)}$$

i tabuliramo ψ (tablica 2), dobijemo

$$\sin^2 \Theta_1 = A + B \cdot \psi(k, \alpha_1).$$

Iz tablice 2 (te su tablice u originalnim radnjama (11)—(13) te na pr. u djelu citiranom pod (15) i (16)!) tražimo kušanjem k, pa za svako α nađemo pripadno Θ, t. j. konstruiramo teoretsku krivulju sjaja, koju ispoređujemo sa pravom, dok ne nađemo (po potrebi interpolacijom) pravu vrijednost od k. Time je glavna teškoća riješena.

Naravno da u slučaju I/1 otpada sav taj postupak, jer nam drugi minimum daje smjesta $k^2 = (1 - \lambda_2) : \lambda_1$ (uporedi str. 162). Tu možemo još razlučiti oba minimuma prema ovome:

ako je primarni minimum kod $\begin{cases} \text{totalne} \\ \text{anularne} \end{cases}$ eklipse, onda je sekundarni $\begin{cases} \text{dublji} \\ \text{plići} \end{cases}$.

Preostala dva elementa dobivamo iz dviju osobitih točaka, iz 1. i 2. kontakta; tu je

$$\alpha_1 = 0 \quad \varphi(k, 0) = 1 + k \quad p = 1 \quad \Theta_1 = \Theta' \quad \delta = r_1 + r_2 \ldots r_1^2 (1 + k)^2 = \\ = \cos^2 i + \sin^2 i \cdot \sin^2 \Theta'$$

$$\alpha_1 = 1 \quad \varphi(k, 1) = 1 - k \quad p = -1 \quad \Theta_1 = \Theta'' \quad \delta = r_1 - r_2 \ldots r_1^2 (1 - k)^2 = \\ = \cos^2 i + \sin^2 i \cdot \sin^2 \Theta''.$$

Stavimo li

$$\varphi_1(k) \equiv \varphi^2(k\alpha_2) - \varphi^2(k\alpha_3), \quad \varphi_2(k) \equiv \frac{\varphi_1(k)}{\varphi^2(k\alpha_2)}$$

i tabuliramo u tablici 2a, to uz nađeno k, dobivamo kao rješenje

$$r_1^2 \cdot \operatorname{cosec}^2 i = B : \varphi_1(k) \quad \operatorname{ctg}^2 i = (B : \varphi_2(k)) - A.$$

Time dobivamo i, r_1. Ako bi desna strana izašla imaginarna, uzmemo $i = 90^0$.

Pri tome Θ' daje početak eklipse t', Θ'' daje početak totaliteta t''. Za centralnu eklipsu se radi $i = 90^0$ stvar vrlo pojednostavnjuje, te, ako uvedemo

$$\Phi(k, \alpha_1) = \varphi_2(k) \cdot \psi(k, \alpha_1),$$

daje Russellova tablica 4 brzo rezultat.

Rješenje problema za slučaj II/1:

Tu imamo $$\alpha_0 = \frac{1 - \lambda_1}{L_2}, \quad \alpha = \frac{1 - l_1}{L_2}$$

dakle $$n \equiv \frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{1 - l_1}{1 - \lambda_1}$$

Odaberemo $\Theta_1 = \Theta_n$ za koji je $\alpha_1 = n\alpha_0$, pa jednadžbu $A + B\,\psi\,(k, n\alpha_0) = \sin^2\Theta_n$ pišemo za $\alpha_1 = n\alpha_0$ ili $\Theta_1 = \Theta_n$, $\alpha_2 = \alpha_0$, ili $\Theta_2 = 0$, $\alpha_3 = \frac{\alpha_0}{2}$ ili $\Theta_3 = \Theta\left(\frac{1}{2}\right)$. Odatle slijedi:

$$\frac{\sin^2\Theta_n}{\sin^2\Theta\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\psi\,(k, n\alpha_0) - \psi\,(k, \alpha_0)}{\psi\left(k, \frac{\alpha_0}{2}\right) - \psi\,(k, \alpha_0)} \equiv \chi\,(k, \alpha_0, n)$$

Russel je našao empirički gotovo točnu linearnu zavisnost

$$\chi\,(k, \alpha_0, n) = \omega_1\,(n) + \omega_2\,(n) \cdot \chi\left(k, \alpha_0, \frac{1}{4}\right),$$

zato je tabulirao $\chi\left(k, \alpha_0, \frac{1}{4}\right)$, ω_1, ω_2 u tablici 3, 3a. Sad još pokratimo

$$C = \sin^2\Theta\,(1/4), \quad D = \sin^2\Theta\,(1/2)$$

pa imamo

$$\chi\left(k, \alpha_0, \frac{1}{4}\right) = C : D \qquad \sin^2\Theta_n = C \cdot \omega_2\,(n) + D \cdot \omega_1\,(n)$$

Riješimo jednadžbe

$$\alpha_0 = 1 - \lambda_1 + \frac{1 - \lambda_2}{k^2}, \quad \chi\left(k, \alpha_0, \frac{1}{4}\right) = C : D$$

najbolje grafički, te time nađemo k, α_0. Ostali elementi slijede iz 1. kontakta analogno prijašnjem:

$$\frac{\cos^2 i}{r_1^2} = \varphi^2\,(k, \alpha_0) \qquad D \cdot \frac{\sin^2 i}{r_1^2} = \varphi^2\left(k, \frac{\alpha_0}{2}\right) - \varphi^2\,(k, \alpha_0) \qquad \Theta_2 = 0$$

Time dobijemo r_1, i.

b) Korekture za razna poopćenja osnovnog slučaja.

Najprije ćemo razmotriti slučaj tamnog ruba zvijezde, D-hipotezu. Za plošni sjaj Sunca postoji Schwarzschild-Emdenova formula

$$I = I_0 \cdot \frac{2}{5}\left(1 + \frac{3}{2} \cdot \cos\gamma\right)$$

gdje je γ kut normale površine zvijezde i doglednice. Kod zvijezda ne možemo numerički unaprijed odrediti oba parametra; ali ako za Sunce uzmemo $3/5 = x$, možemo formulu za plošni sjaj pisati

$$I = I_0\,(1 - x + x \cdot \cos\gamma)$$

Ovu formulu uzimaju Russell i Shapley za opadanje sjaja prema rubu kod zvijezda; specijalno za $x = o$ imamo U-hipotezu $I = I_0$, dok za $x = 1$ imamo potpuno tamni rub D-hipotezu. Osnovna je formula dakle za plošni sjaj u D-hipotezi Lambertov fotometrički zakon

$$I = I_0 \cdot \cos\gamma .$$

Intermedijarni slučajevi $o < x < 1$ daju onda izvjesno slabljenje sjaja prema rubu, kao kod Sunca. U tom slučaju moramo rješenje interpolirati (dosta je linearno) između rješenja U-hipoteze i D-hipoteze. Sad ne možemo više iz jednostavnih geometrijskih odnosa zaključiti na gubitak sjaja (kao prije sa α), nego moramo poći od formule za integralni sjaj vidljive ploče zvijezde:

$$L = \iint\limits_D I\,d\sigma = \iint\limits_k I\,r\,dr\,d\varphi = \int_o^r 2\pi\, I\,r\,dr \quad \left(\sin\gamma = \frac{r}{r_i},\ \cos\gamma = \sqrt{1 - \frac{r^2}{r_i^2}}\right)$$

Ta integracija daje:

$$L_i = \pi r_i^2 \cdot I_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{3}\right).$$

Neka je sad L' gubitak sjaja za S_2, L'' gubitak sjaja za S_1; vrijednostima $x = 0,1$ neka odgovaraju indeksi 0,1. Onda su formule za linearnu interpolaciju

$$L' = (1 - x) \cdot L_0' + x \cdot L_1', \quad L'' = (1 - x) \cdot L_0'' + x \cdot L'_1$$

Sad je dosljedno prema prije:

$$L_0' : L_2 = \alpha_i \quad L_0'' : L_1 = k^2\alpha .$$

Dalje je postupak u principu isti, samo rabimo druge tablice. Umjesto formule za α_0 imamo ovdje

$$Q\,(k, \alpha_0') = \frac{1 - \lambda_2}{\alpha_0' - (1 - \lambda_1)}$$

u tablici 5., što dobivamo iz

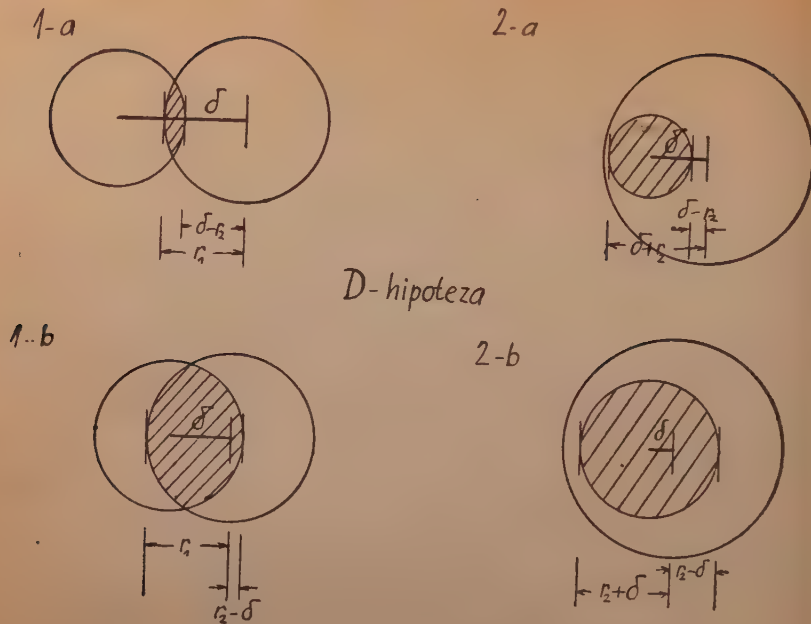
$$1 - \lambda_2 = \alpha_0'\,Q \cdot L_1, \quad 1 - \lambda_1 = \alpha_0' \cdot L_2, \quad L_1 + L_2 = 1 .$$

Tu se akcent odnosi na tamni rub. Vidimo, da U-hipoteza znači $Q = k^2$. Za slučaj P-eklipse uzmemo iz numeričkih razloga:

$$\alpha_0'' \cdot Q\,(k, 1) = \alpha_0' \cdot Q\,(k, \alpha_0') .$$

No vrlo je teško razlikovati P_U-eklipsu od T_D-eklipse. Russell je proveo empiričke račune, kojima se može (tablica C) preći od U-hipoteze na D-hipotezu. Interpolacija za intermedijarne slučajeve olakšana je tablicama 6., u kojima su tabulirane funkcije X (k, α) i Y (k, α) definirane relacijama:

$$1 - l_1 = \alpha L_2\,(1 + x \cdot X) \quad 1 - l_2 = k^2 \alpha\, L_1\,(1 + x \cdot Y) .$$



Sl. 11.

Na kraju je međutim bitno objasniti, kako su u ovom slučaju izračunate tablice za D-hipotezu: vidjeli smo, da su U-tablice išle od relacije $\delta : r_1 = \varphi$ (k, α) i t. d. Ovdje je temelj fotometrička formula za sjaj

$$L = \iint_D I\, d\sigma = \iint_D I \cdot r\, dr\, d\varphi.$$

Za cijelu vidljivu ploču (disk) su granice u integralu o ... r, o ... 2 π. No za vrijeme eklipse mijenjaju se granice. Dajemo samo objašnjenje za eklipsu od S_1, jer za S_2 izlaze analogne formule, samo zamjenom indeksa.

1) $r_1 + r_2 > \delta > r_1 - r_2$ (P-eklipsa)

a) $\delta > r_2 \ldots L'' = \int\limits_{\delta - r_2}^{r_1} \int\limits_{0}^{2\varphi_1} I r\, dr\, d\varphi = 2 \int\limits_{\delta - r_2}^{r_1} \varphi_1 \cdot I \cdot r\, dr$

b) $\delta < r_2 \ldots L'' = \int\limits_{0}^{r_2 - \delta} \int\limits_{0}^{2\pi} I r\, dr\, d\varphi + \int\limits_{r_2 - \delta}^{r_1} \int\limits_{0}^{2\varphi_1} I r\, dr\, d\varphi$ i t. d.

2) $r_1 - r_2 > \delta > 0$ (A-eklipsa)

a) $\delta > r_2 \ldots L'' = \int\limits_{\delta - r_2}^{\delta + r_2} \int\limits_{0}^{2\pi} I r\, dr\, d\varphi = 2\pi \int\limits_{\delta - r_2}^{\delta + r_2} I r\, dr$

b) $\delta < r_2 \ldots L'' = \int\limits_{0}^{r_2 - \delta} \int\limits_{0}^{2\pi} I r\, dr\, d\varphi + \int\limits_{r_2 - \delta}^{r_2 + \delta} \int\limits_{0}^{2\varphi_1} I r\, dr\, d\varphi$ i t. d.

Praksa je pokazala, da su elementi orbita, dobiveni na osnovi D-hipoteze uvijek bolji od U-hipoteze; stvarno se jedva može zamisliti, da bi u krivulji sjaja dolazili oštri prelomi.

Prelazimo na slučaj, kad zvijezde nisu više sferne, nego pokazuju jaču sploštenost, kad su elipsoidi. Već 1896. je Myers pokušao time objasniti krivulju sjaja β Lyrae, a Russell je to uklopio u svoju metodu. Pretpostavljamo da su obje komponente slični elipsoidi (u prvoj aproksimaciji), kojima najduže osi leže u »centrali«, spojnici središta; rotaciju i revoluciju uzimamo tada vezanom iz dinamičkih razloga, perioda P. Ostale dvije osi elipsoida zvijezda ne možemo razlikovati, zato ih uzimamo kao rotatorne elipsoide s osi simetrije u centrali. Neka su dakle osi $a_1 : b_1 : b_1$, $a_2 : b_2 : b_2$, uz uvjet sličnosti $a_2 = k \cdot a_1$, $b_2 = k \cdot b_1$, $o < k < 1$; neka meridijanski presjek elipsoida ima ekscentricitet

$$\varepsilon^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

U ma kojem času su konture zvijezda slične elipse s osima $d_1 : b_1$ i $d_2 : b_2$, $d_2 = k \cdot d_1$. Izvan eklipsa je

$$\frac{l_1}{L_1} = \frac{l_2}{L_2} = \frac{l_1 + l_2}{1} = \frac{d_1}{a_1} = \frac{d_2}{a_2}$$

d-os konture dana je formulom

$$d_1 = a_1 \cdot \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cdot \cos^2 \varphi}$$

Ako nam naime φ znači kut doglednice i velike poluosi a u ma kojem času, onda je kontura dodirna crta tangentnog čunja na elipsoid s osi u smjeru φ; udaljenost tih tangenata od centra je

$$|\delta| = d = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

ako je jednadžba tangente općeno $Ax + By + C = O$ u ravnini doglednice i osi a. Dalje je po poznatim formulama analitičke geometrije

$$\frac{A}{B} = -\operatorname{tg} \varphi, \quad \frac{C}{B} = -n, \quad d = \frac{n}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = n \cos \varphi;$$

$$b^2 + a^2 \operatorname{tg}^2 \varphi = n^2, \quad n^2 \cos^2 \varphi = b^2 \cos^2 \varphi + a^2 \sin^2 \varphi,$$

$$d^2 = n^2 \cos^2 \varphi = a^2 - a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi = a^2 \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \cdot \cos^2 \varphi\right),$$

$$d^2 = a^2 (1 - \varepsilon^2 \cdot \cos^2 \varphi),$$

a to je već naša formula, u kojoj se mijenja samo fazni kut φ.

No opet je $\cos\varphi = \sin i \cdot \cos\Theta$, stavimo li dakle $z = \varepsilon^2 \sin^2 i$, to opažamo sjaj

$$l = l_1 + (1 - \alpha) l_2 = \sqrt{1 - z \cdot \cos^2\Theta} \cdot [L_1 + (1 - \alpha) \cdot L_2]$$

gdje je izvan eklipse $\alpha = o$. U blizini $\Theta = 90^0$ je $l_{max} = L$, za $\Theta = 0^0$ je $l = \lambda$. Iz jednadžbe $l^2 = 1 - z \cdot \cos^2\Theta = f^2$ odredimo, najbolje grafički, blizu $\Theta = 90^0$ naš z (gdje smo sigurni, da nema eklipse!). Kako α ovisi samo o omjeru $d_1 : d_2 : \delta$, možemo uzeti kao reprezentante kružne konture razmjera veličina $l : k$, sa centralnom distancom $\varrho' = \delta : d = \varphi\ (\varkappa, \alpha)$ i rabiti iste formule i tablice kao u temeljnom slučaju. Samo treba »eliptičnu« krivulju sjaja rektificirati na »sfernu« pomoću $m = m_0 - 2{,}5 \cdot \log l$. U nekim se formulama javlja još faktor f^2, ali u te detalje nećemo ulaziti.

Uzmemo li sad u ovom »eliptičnom« slučaju D-hipotezu, moramo računati sjaj po formuli

$$L = \iint\limits_D I\, d\sigma', \quad I = I_0 \cdot \cos\gamma, \quad d\sigma' = d\sigma \cdot \cos\gamma;$$

dakle

$$L = I_0 \iint\limits_E \cos^2\gamma\, d\sigma, \qquad \cos\gamma = l\lambda + m\mu + n\nu$$

gdje su l, m, n kosinusi smjera normale, a λ, μ, ν kosinusi smjera doglednice. Imamo sad

$$\lambda = \sin i \cdot \cos\Theta, \qquad \mu = \sin i \cdot \sin\Theta, \qquad \nu = \cos i$$

pa ako pokratimo

$$A = \frac{I_0}{2} \iint\limits_E l^2 d\sigma, \qquad B = \frac{I_0}{2} \iint\limits_E m^2 d\sigma, \qquad C = \frac{I_0}{2} \iint\limits_E n^2 d\sigma$$

gdje je prema našim pretpostavkama B=C, dobivamo formulu:

$$L = A \cdot \sin^2 i \cdot \cos^2\Theta + B \cdot \sin^2 i \cdot \sin^2\Theta + B \cdot \cos^2 i.$$

Neka je još za $\Theta = 0^0$, $L = L_{max} = L_0$. Razvijemo A, B u redove potencija od ε, unesemo u gornje izraze i zadržimo samo prava dva člana (druga aproksimacija):

$$L = L_0 (1 - Z \cdot \cos^2\Theta), \; Z = \left(\frac{4}{5}\varepsilon^2 + \frac{16}{175}\varepsilon^4\right) \sin^2 i$$

ili inverzno u drugoj aproksimaciji, pomoću $\sin i = 1$, što smijemo, jer je uvijek vrlo blizu $i = 90^0$,

$$z = \frac{5}{4} \cdot Z - \frac{5}{28} \cdot Z^2.$$

Iz krivulje sjaja odredimo Z u blizini $\Theta = 90^0$, onda po gornjoj formuli z, pa opet rektificiramo krivulju sjaja i radimo kao prije.

Međutim je bitna činjenica, da se po našim formulama za elipsoidalne zvijezde kod U-hipoteze $L = L_0 \sqrt{1 - z \cdot \cos^2 \Theta}$, i kod D-hipoteze $L = L_0 (1 - Z \cdot \cos^2 \Theta)$ vidi, da pojedina elipsoidalna zvijezda mora i bez eklipsa biti promjenljivog sjaja; samo će taj efekt biti vidljiv tek kod izrazite sploštenosti. Time je Shapley mogao vrlo dobro objasniti krivulju sjaja kod zvijezde RU Caml i drugih. U tom slučaju znači Θ kut rotacije. Ovakovi su slučajevi dinamički osobito važni, jer omogućuju kontrolu teoretskih razmatranja o oblicima ravnoteže nebeskih tijela u rotaciji (Mac Laurinov sferoid, Jacobijev troosni elipsoid, Poincaréov apioid) i kosmogonske zaključke, koje je na osnovi toga izveo napose J. Jeans 1919; s druge strane bacaju izvjesno svjetlo i na problem promjenljivih zvijezda, napose Cefeida.

Slijedeći efekt jest efekt faze, međusobne rasvjete komponenata (uporedi str. 159). Neka je sjaj okrenutih polukugala $l_1 + c_1$, $l_2 + c_2$, a otkrenutih polukugala $l_1 - c_1$, $l_2 - c_2$. Onda je u orbiti uz fazu φ i dužinu Θ:

$$l_1 - c_1 \cos\varphi = l_1 - c_1 \sin i \cdot \cos\Theta, \quad l_2 + c_2 \cos\varphi = l_2 + c_2 \sin i \cdot \cos\Theta;$$

dakle skupni sjaj para zvijezda izvan eklipse:

$$l = l_1 + l_2 + (c_2 - c_1) \sin i \cdot \cos\Theta.$$

Neka su fazni efekti proporcionalni plošnom sjaju, a uz isti plošni sjaj obratno proporcionalni površinama $(L = I_0 \cdot r^2 \pi)$, onda je $c_1 : c_2 = L_2 : L_1$. Za kružne orbite je $C_1 \cdot L_1 = c_2 \cdot L_2$ ili $c_1 (1 - \lambda_1) = c_2 (1 - \lambda_2)$. Pređemo sad na magnitude m:

$$\Delta l = (c_2 - c_1) \sin i \cdot \cos\Theta = 1 - (2{\cdot}512)^{\Delta m} \doteq$$

$$\doteq \Delta m \cdot \ln 2{\cdot}512, \quad \Delta m = 1{\cdot}08\,(c_2 - c_1) \sin i \cdot \cos\Theta.$$

Stalni faktor $(c_2 - c_1) \cdot \sin i$ dobijemo iz dviju točaka u opažanoj krivulji sjaja, za koje je $\cos\Theta' = -\cos\Theta''$. U prvoj aproksimaciji pretpostavimo još $i = 90^0$, pa nađemo c_1, c_2. Napokon sve reduciramo na normalnu krivulju za U-hipotezu.

Posljednje poopćenje osnovnog slučaja jest eliptičnost orbite. Ta uopće ovdje ne igra veliku ulogu, jer su orbite fotometričkih dvojnih zvijezda vrlo blizu krugovima. Ako ipak treba uvažiti i taj efekt, uvedemo ekscentričnost orbite e, dužinu u eliptičnoj orbiti $\beta = \omega + v$ (kut radija vektora i projekcije doglednice na ravninu orbite), onda je prividni radijvektor $\varrho^2 = r^2 (1 - \cos^2\beta \cdot \sin^2 i)$.

Sad za pravu anomaliju v primijenimo razvoje u redove po srednjoj anomaliji iz problema dvaju tijela:

$$\beta = \omega + v - \frac{\pi}{2} = \omega - \frac{\pi}{2} + (M + 2e \cdot \sin M + \ldots) = f(\Theta),$$

uzmemo samo linearne članove, izračunamo tako teoretsku krivulju sjaja uz neke početne pretpostavke o veličinama, koje ovdje dolaze, te isporedimo teoretsku krivulju s opažanom krivuljom sjaja, pa sistematski aproksimiramo najbolje rješenje. Ovaj će račun biti potreban u vrlo rijetkim slučajevima. Ako je uz eliptičnu orbitu razmak komponenata vrlo malen, onda je plimsko djelovanje znatno, osobito u periastronu, pa se javlja val plime, koji možemo u prvoj aproksimaciji predočiti formulom

$$\Delta m = a \cdot \cos\Theta + b \cdot \sin\Theta .$$

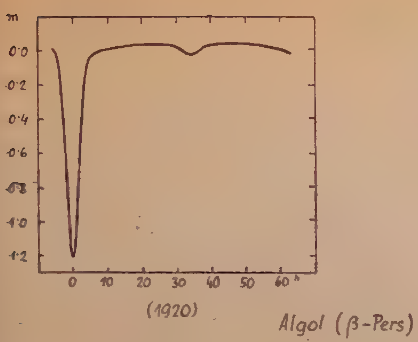
No tu se prvi član miješa sa efektom faze, dok bi se drugi dao iz opažanja odrediti. Osim toga su svojedobno razmatrali smetnje, koje nastaju u eliptičnom gibanju radi sploštenosti komponenata, te izazivaju okretanje apsidne linije kao glavni efekat (Tisserand i drugi). Međutim su se svi ti efekti u praksi pokazali neznačajnima prema efektu tamnog ruba i eliptičnosti komponenata.

Na kraju navodimo elemente orbita najpoznatijih predstavnika te grupe dvojnih zvijezda, koje su toliko sjajne, da im je poznata i spektroskopska orbita, a time i dimenzije sustava:

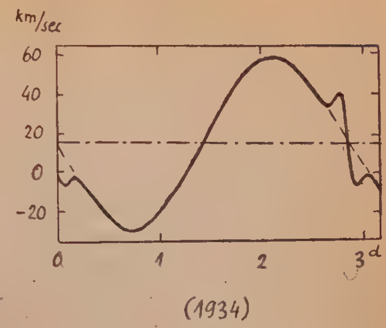
1) Algol (β Pers) (Slike 12—13) Elementi spektroskopske orbite: $P = 2{,}86730$ d, $T = 1{,}506$ d iza čvora, $\omega = 277{,}5^0$, $e = 0{,}038$, $K = 44{,}1$ km/sec, $V_0 = + 16{,}9$ km/sec, $a \cdot \sin i = 1\,736\,000$ km; iz fotometričke orbite: $R_1 = 3{,}12$ $R_2 = 3{,}68$ radija Sunca, gustoće su 0,16 i 0,02 gustoće Sunca, mase 4,72 i 0,95 masa Sunca, prava udaljenost centara 10 512 000 km.

Nadalje je orbita težišta uskog dvojnog (fotometričkog) sustava oko težišta trojnog sustava (Algol je u stvari trojni sustav zvijezda): $P = 1{,}885$ god., $T = 0{,}943$ god. iza epohe čvora 1901,85, $\omega = 0^0$, $e = 0{,}13$, $i = 58^0$ (?), $K = 10{,}0$ km/sec, $a \cdot \sin i = 93\,000\,000$ km, $V_0 = + 5{,}7$km/sec.

2) β Lyra: fotometrička orbita (J. Stebbins LOB 8, 1918 i P. Guthnick Berl. Babelsb. 1918 fotoelektričnom stanicom)



Sl. 12.



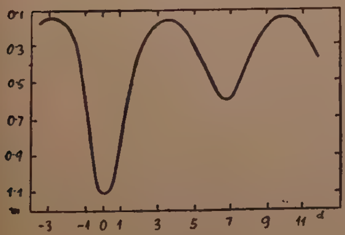
Sl. 13.

$\varepsilon = 0{,}59$, $b : a = 0{,}8$, $i = 90^0$, $L_1 = 0{,}55$, $L_2 = 0{,}45$, $k^2 L_1 : L_2 = 0{,}35$; gustoće su 0,0022 i 0,0060 gustoće Sunca, poluosi zvijezda u jedinicama poluosi orbite: 0,5 i 0,3 t. j. obje zvijezde se gotovo dotiču!

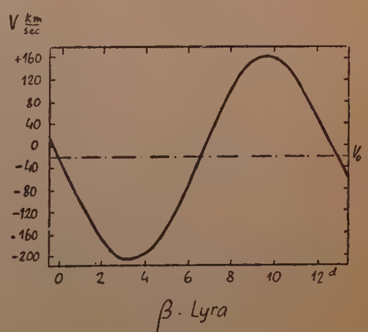
Spektroskopska orbita (R. V. Curtiss, Allegheny Obs. Publ. 2, 1911 i Rossiter Ap J 60, 1924) $P = 12{,}922$ d, $T = 8{,}541$ d, $\omega = 325{,}05^0$, $e = 0{,}014$ $K = 187{,}31$ km/sec, $V_0 = -19{,}02$ km/sec, a. sini = 32 639 000 km, faktor mase = 8,32 mase Sunca. Po spektru se obje zvijezde kreću unutar zajedničke atmosfere vodika i helija. (Slika 14—15)

3) Na kraju je vrlo zanimljiva grupa ε — Aurigae

ε Auri (Vogel 1902, Ludendorff 1903, 1912) imade P = 9883 d = cca 27 godina!, slijedeća imerzija je 1956,5; trajanje eklipse 754 d = 2 god. 1 mj.! Paralakse su između 0″.008 i 0″.006, dakle



Sl. 14.

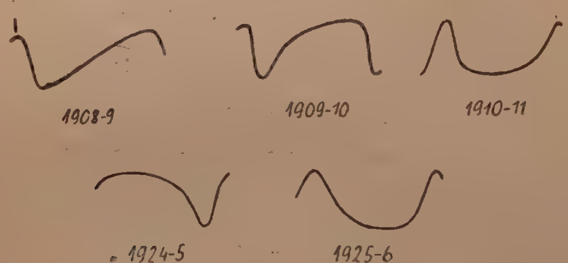


Sl. 15.

radius 250 radija Sunca. Na orbiti se jasno vide smetnje treće komponente u zakretanju apsidne osi, što se vidi po izgledu krivulje brzina (slika 16).

ζ Auri (W. H. Christie i O. C. Wilson 1935) P = 973 d, složeni spektar je K5 + B8e.

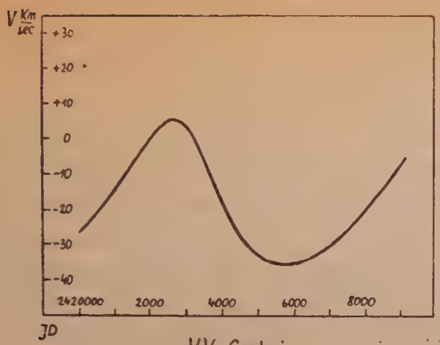
4) VV Ceph (D. B. Mc Laughlin 1936, S. P. Gapoškin 1937, V. Goedicke 1938.). Zvijezda ima oznaku Henry Draper kataloga HD 208 816 ili Boss 5650, koordinate $\alpha = 21^h 53{,}8^m$ $\delta = + 63^0 09'$ (1900,0). Spektroskopsku su orbitu računali Adams i Joy (PASP 33, 1921) te Mc Laughlin (Ap J 79, 1933): P = 7430 d = 20,5 god!, $\omega = 36^0$, e = 0,23, K = 20,5 km/sec, $V_0 = -19{,}1$ km/sec, a. sini = $1{,}98.10^9$ km, faktor mase 5,62 mase Sunca.



ε Aurigae Sl. 16.

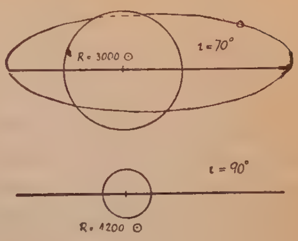
Krivulja sjaja je vrlo nepravilna, jer je veća primarna komponenta nepravilno promjenljivi crveni supergigant. Odatle izvire niz posebnih poteškoća, pa na pr. Goedicke dolazi do dvije moguće orbite: $i = 70^0$, radiji 3000 i 22 radija Sunca, mase 57 i 40 masa Sunca, gustoće 2.10^{-9} i 4.10^{-3}, bolometrički apsolutni sjaj —9,3 i —5,2 uz spektar M2 + Be (Slike 17—18). Za $i = 90^0$ je radij veće 1220 radija Sunca i nešto manja masa i gustoća. Paralakse (indirektne) su oko 0″,0005 dakle udaljenost = 10000 godina svjetlosti; a = 34,3 astr. jed., a trajanje eklipse je 450d = 1,25 god.

Čitava se ta grupa zvijezda odlikuje time, što imademo neobičan par zvijezda: ogroman crveni supergigant izvanredno male gustoće i sjajna bijela zvijezda, koja treba godine da prođe iza veće komponente; no pri tome prosijava bijela zvijezda kroz vrlo rijetku atmosferu crvenog supergiganta, u toj se atmosferi apsorbira svjetlost i pomoću linija apsorpcije dopušta



VV Cephei

Sl. 17.



VV Cephei

Sl. 18.

vrlo detaljan studij strukture atmosfere ovakovog crvenog supergiganta. Tako su atmosfere tih zvijezda najbolje proučene iza atmosfere Sunca, makar se nalaze u izvanrednim udaljenostima. Kod VV Cephei pokazala je spektralna analiza, da se obje komponente kreću u zajedničkoj atmosferi u kojoj su utvrđene linije joniziranih željeznih para kao glavne. Po svima tim odnosima spada ta grupa zvijezda među najčudnovatije nebeske objekte.

LITERATURA:

(1) J. F. Encke: Berl. Astronom. Jahrbuch za 1832.
(2) W. Klinkerfues: AN 42 (1855)
(3) T. N. Thiele: AN 104 (1883)
(4) A. Marth: MN 47 (1887)
(5) A. A. Rambaut MN 51 (1891)
(6) R. Lehmann-Filhés: AN 136 (1894)
(7) H. Zwiers: AN 139 (1896)
(8) J. Bauschinger: Bahnbestimmung der Himmelskörper. 1906.
(9) J. Hepperger: Encykl. Mathem. VI-2-B, 11 (1910).
(10) W. Klinkerfues: Theoretische Astronomie (Buchholz 3. izdanje) 1912.
(11) H. N. Russell: Ap J 35 (1911)
(12) H. N. Russell: Ap J 36 (1912)
(13) H. N. Russell-H. Shapley: Ap J 36 (1912)
(14) H. C. Plummer: Introductory treatise of dynamical astronomy. 1918.
(15) J. Hagen-J. Stein: Veränderliche Sterne II. 1924.
(16) F. C. Henroteau: Double and multiple stars (Hdb. Astroph. VI) 1928.
(17) E. i B. Strömgren: Lehrbuch der Astronomie. 1933.
(18) V. Goedicke: A study of the spectrum of VV Cephei. (1938). (Publ. observ. Univ. Michigan VIII—1).
(AN = Astronomische Nachrichten, MN = Monthly Notices of the R. A. S., Ap J = Astrophysical Journal).

SUMMARY

Determination of the orbits of binary stars

In this informatory article a survey is given of the principal methods of the determination of the orbital elements of visual, spectroscopic and photometric binaries (eclipsing variable stars). After a brief historical introduction on visual binaries, two pure graphical methods for determining orbits are exposed, the simple Zwiers' method and the method of Henroteau for the case $i=90^0$; the principle of Seeliger's analytical method is then explained, and some references follow on certain interesting special cases. For the spectroscopic binaries a more complete treatment is given of the Lehmann-Filhés method with general discussion.

In the third part of this article a thorough exposition is given of Russell's famous method for photometric (eclipsing) binaries. The symbols and abbreviations employed are Russell's original symbols, as to facilitate the use of numerical tables computed by Russell in his fundamental papers (11) — (13), reproduced e. g. in (15) or (16). In the discussion of special effects and generalisations: D-hypothesis; ellipsoidal stars, especially those with darkened limb; phase-effect; elliptical orbit; tidal action — only the principles are exposed, and all details omitted. Finally there are given orbital elements, the best to-day available, for three types of eclipsing variable stars: β Pers, β Lyra and the remarkable ε Auri group, with special respect to VV Ceph, one of the most interesting stars.

Dr. Andro Gilić

SUNČANE PJEGE U GODINI 1946-1947

O Sunčanim pjegama u godini 1943.—1945. bilo je izviješteno u Glasniku matematičko-fizičkom i astronomskom, 1946, str. 80. Ovdje slijedi analogni izvještaj za god. 1946. i 1947.

U obim godinama motrilo se je u Zagrebu istim dalekozorom, povećanja 42 x, kao ranije, i to direktnim viziranjem Sunca. Prilikom svakoga motrenja nacrtana je slika i na temelju iste određivala se je heliografska širina svake skupine pjegâ, grafičkom metodom.

Statistički podaci za obje godine sabrani su u priloženoj tabeli, a grafički prikaz tôka relativnog broja pjegâ r, i to za zadnjih 5 godina, vidi se iz priložene slike. Tanja crta predočuje nekorigovane vrijednosti, a deblja crta daje izravnati tôk.

Kako je već ranije spomenuto, definiran je relat. broj pjegâ odnosom $r = 10\ g + f$, gdje g znači broj skupina, koje su na dan motrenja primijećene, a f znači broj pjegâ. U tabeli je naznačen najprije broj dana, kad se je motrilo, zatim slijede redom: prosječne dnevne vrijednosti f, g i r za svaki mjesec, i godinu. Relat. broj r za obje godine unesen je i po izravnatom toku, a za godinu 1947. unesen je i po shemi, koju upotrebljava Moskovski institut za istraživanje zemaljskog magnetizma, naime relat. broj samo takvih pjegâ, koje leže unutar centralnog kruga, čiji je polumjer jednak polovici polumjera Sunčane plohe.

Prije nego pređemo na diskusiju rezultata motrenja u god. 1946/47., sjetimo se u kratko onoga, što je bilo ustanovljeno za prethodne godine:

U godini 1943. bila je Sunčana aktivnost slaba, i u postepenom padu.

U godini 1944. nastupio je, u februaru, minimum.

Od februara 1944. pa dalje do konca 1945., broj Sunčanih pjega je opet bio u porastu.

To se sve jasno razabire iz priložene slike.

Što se tiče raspodjele pjegâ na Sunčanoj plohi u razdoblju 1943/45, moglo se je tada razlikovati dvije epohe: prva, prije nastupa minimuma t. j. do februara 1944., kad je većina pjegâ bila primijećena oko centralne zone Sunca, između —10° i +10° heliogr. širine, i druga, nakon minimuma, kad je većina pjega bila u višim širinama. Napadna je pak bila podjela pjegâ prema pojedinim polutkama Sunca: prije minimuma bilo je na sjevernoj polutci otprilike dvaput toliko pjega koliko na južnoj, a nakon minimuma bilo je baš obratno.

Što nam pokazuju motrenja u god. 1946. i 1947.?

U 242 dana god. 1946. i 249 dana god. 1947., kad se je motrilo Sunce, zabilježeno je 222 skupina pjega odnosno 412. U godini 1945., kod većeg broja dana, t. j. 281 bilo je zabilježeno samo 104 skupina.[1]

Iz tablice slijedi, da se je na Suncu dnevno moglo vidjeti prosječno 5 do 6 skupina sa 27 pjega u godini 1946., a u godini 1947. po 9 skupina sa 43 pjega. U obim godinama nije bilo dana bez pjega!

Prosječno kroz godinu 1946. iznosio je dnevni relat. broj pjega okruglo 81, a za 1947. godinu 132, naprama 29 u godini 1945. Ako te brojeve hoćemo da reduciramo na normalne Züriške vrijednosti, moramo ih povisiti[2] za 15%. Tako bismo dobili za 1946. prosječni relativni broj **93**, a za 1947. broj **152**.

---

[1] U tim brojevima računata je svaka skupina samo jedamput, bez obzira na to, kroz koliko je dana bila vidljiva. Ali među njima ima ipak 5 do 10% skupina, koje su, nakon što su izvršile jednu ili više rotacija Sunca, opetovano motrene. Mnijenja smo, da ove ne bi trebalo kod prosuđivanja jakosti Sunčane aktivnosti odbiti od ukupnog broja zapaženih skupina, jer ako je neka skupina doživjela više od jedne rotacije Sunca, to dokazuje njezinu jakost i takva skupina znači svakako više, nego kakva kratkotrajna, možda samo jednodnevna, skupina. S druge strane, razumije se, da broj zapaženih skupina ovisi o raznim faktorima, u prvom redu o instrumentu, kojim se motri, pa o motritelju itd., tako da gore spomenuti brojevi imadu samo relativni značaj. Oni su ipak podesni za usporedbu homogenih serija, kakvim možemo smatrati naša motrenja.

[2] Na temelju usporedbe motrenja u Zürichu i naših, u god. 1946, proizlazi naime redukcioni faktor 1,15.

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	Zbroj	Prosjek
1946														
Broj dana motrenja	11	19	17	27	28	29	27	25	24	16	8	11	242	
Srednji dnevni broj pjega f .	9	20	23	19	25	22	41	35	33	24	37	33		27
Srednji dnevni broj skupina g	3.5	5.2	4.6	5.2	4.8	4.6	5.5	5.7	6.1	6.2	7.6	5.7		5.4
Srednji dnevni relativni broj r	44	72	69	71	73	68	96	92	94	86	113	90		81
Detto, izravnate vrijednosti r .	53	59	64	69	73	78	83	87	89	92	97	104		
Datum prolaza jačih skupina pjega kroz centralni meridijan Sunca[8]	17	5.5	6	2	4	5	6	2	13	4	14.5	17		
	26		26	4	4	26	7	2	15	13	24	20		
				14	5		18	10	19	20		25		
				23	13		18	24	23					
				26	23		27	29	25					
1947														
Broj dana motrenja	16	6	22	23	17	24	29	28	27	22	17	18	249	
Srednji dnevni broj pjega f .	31	36	32	37	64	42	38	59	54	48	35	35		43
Srednji dnevni broj skupina g	7.1	5.7	7.1	7.3	9.8	9.2	9.3	11.0	11.9	11.1	9.6	8.3		8.9
Srednji dnevni relativni broj r	102	93	103	110	162	134	131	169	173	159	131	118		132
Detto, izravnate vrijednosti r .	108	112	119	125	129	131	132	131	130					
Detto, u srednjem dijelu Sunca[9]	35	51	42	41	55	50	54	67	73	68	53	46		53
Datum prolaza jačih skupina pjega kroz centralni meridijan Sunca[8]	8	5	4	6.5	5	8	2	4	2	3	3	13		
	13	11	10	20	10	21	4	6.5	6	6	24	24		
	14	12	10	27	10	21.5	10	13	17	15		28		
	17	25	21	27	14.5		15.5	16	26	20		31		
	19	27	29	28	21		18			22				
	21			29	23		20							
	22				24		25							
	27				25									
					26									
					26									
					31									

[8] obične brojke naznačuju, da se dotičnog dana nije motrilo, nego je datum ustanovljen interpolacijom.
[9] unutar kruga, čiji je polumjer = polovici polumjera Sunčane plohe

U pojedinim mjesecima relativni je broj dosta kolebao, ali izravnati tôk pokazuje u obim godinama stalni i snažni porast do jula 1947., kada krivulja počinje da se spušta (vidi sliku). Prema tome možemo uzeti, da je maksimum u ovom ciklusu već nastupio, i to u epohi **1947,5** sa relativnim brojem (uvijek po izravnatom toku) 132 odnosno 152, ako ga reduciramo na normalne Züriške vrijednosti. Razmak vremena od prethodnog maksimuma (1937,4) do sadašnjeg maksimuma u julu 1947. iznosi 10,1 godine, a interval od pređašnjeg minimuma (1944,2) do maksimuma (1947,5) iznosi 3,3 godina. Porast od minimuma do maksimuma išao je dakle mnogo brže od prethodnog pada. Ali to nije neobična pojava, jer u prosjeku iznosi interval od minimuma do maksimuma oko 4½ godina, i općenito je tim kraći, što je maksimum jače razvijen. Tako je na pr. u ciklusu 1933.—1944. trebalo za porast samo 3 godine 7 mjeseci, naprama 6 godina i 10 mjeseci, koliko je trajao pad.

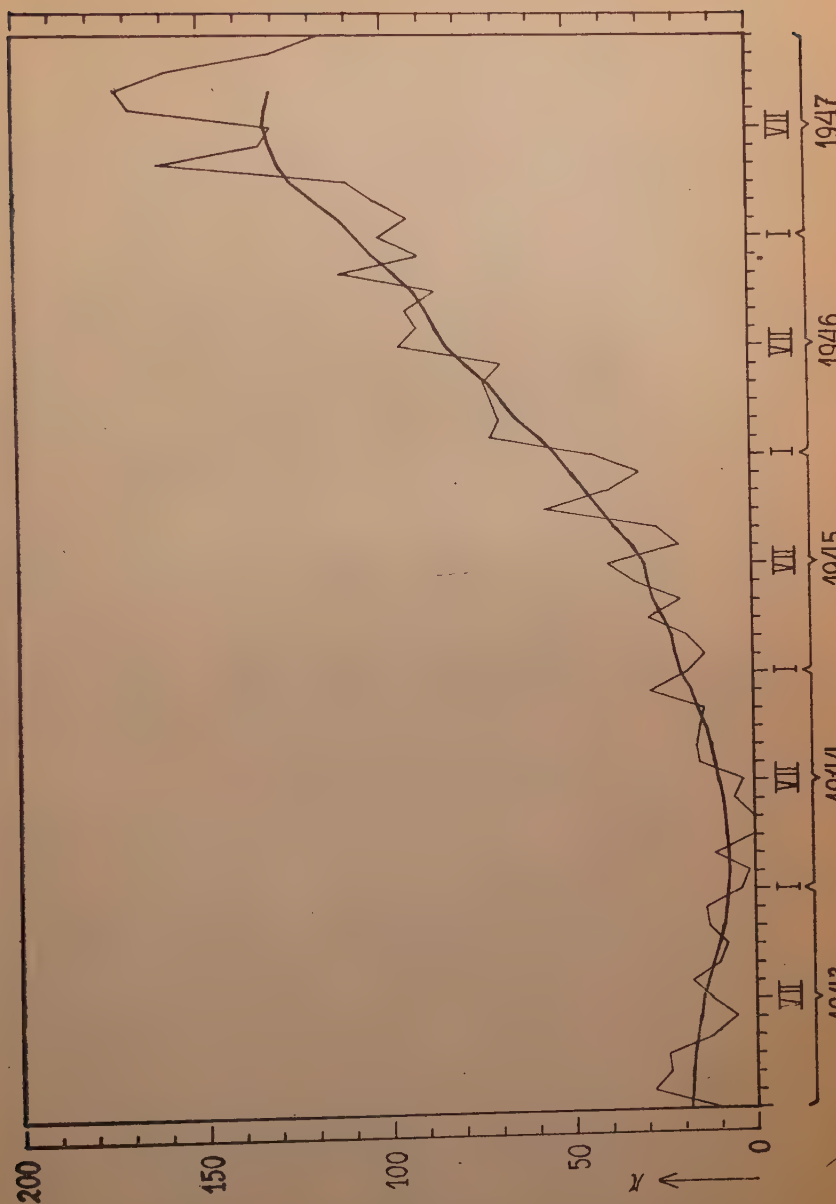
Godina 1947. značajna je ne samo po tome, što je prosječni godišnji relat. broj dostigao vrijednost, koja se može mjeriti sa najvišim vrijednostima iz god. 1778., — a koja serija spada među najjače u posljednjih 200 godina —, nego i po pojedinim izvanredno jakim pjegama. Ali i 1946. godina se je isticala nekim vrlo razvijenim skupinama pjega. U slijedećoj skrižaljci donosimo podatke o heliografskoj širini i o datumu prolaza kroz centralni meridijan Sunca za tri takve pjege, od kojih se dvije odnose na 1946. godinu a jedna na 1947.:

I skupina, hel. šir. +24°, 5—6-II-1946., 6—7-III, 4-IV i 2—3-V.
II skupina, hel. šir. +21°, 26—27-VII-1946., 24-VIII i 19-IX.
III skupina, hel. šir. —23°, 11-II-1947., 10-III, 6—7-IV i 5-V.

Sve su gornje skupine doživjele po više rotacija Sunca, tako da je veličanstveni prizor krupnih pjega trajao kroz više mjeseci. Skupine su u svom najjačem nastupu bile tipa F po Züriškoj klasifikaciji t. j. sastojale su se od više žarišta rasprostranjene penumbre s većim brojem jezgra, i k tome mnogo većih i manjih pjega izvan penumbre.

Najjača od svih bila je treća skupina, u aprilu 1947. Prema mjerenjima izvršenim na Greenwichkom opservatoriju zapremala je ona površinu od 5400 milijuntina vidljive Sunčane

Relativni broj Sunčanih pjega od 1943 do 1947 godine



hemisfere[3], i ima se smatrati najvećom skupinom, koja je ikada zabilježena, otkad postoje pouzdani podaci o Sunčanim pjegama. Odmah iza nje po redu veličine (4900/10^6 dijela Sunčane vidljive hemisfere) dolazi I skupina u februaru 1946., i to već kod svog prvog prolaza kroz centralni meridijan Sunca. Treća po redu veličine (3950/10^6) dolazi II skupina, i to opet kod svog prvog prolaza kroz centr. meridijan. Sve su te skupine bile vidljive i prostim okom (razumije se, kroz začađeno staklo) te su pobudile pažnju i šire javnosti.[4]

Velika skupina u aprilu 1947. došla je do izražaja na površini Zemlje i time, što se je tog mjeseca pojavila Polarna svijetlost čak nad Beogradom. Značajno je samo, da je ta svijetlost nastala tek 17 aprila u večer, dočim je spomenuta skupina prošla kroz centr. meridijan Sunca već 7 aprila, a tri dana prije 17 aprila skupina je bila već zašla iza zapadnog ruba vidljive hemisfere Sunca. Ako se uzme, da je Polarna svijetlost izazvana strujom naelektrisanih čestica, koje su izbile iz nekog žarišta na Suncu (pri čemu se u prvom redu misli na t. zv. eruptivne baklje u blizini pjega) to valja pretpostaviti, da je to žarište moralo da bude dosta razdaleko, i to istočno, od same pjege. Do tog zaključka se dolazi, ako se uzme u obzir brzina strujanja spomenutih čestica: 1600 do 2000 km na sek. i ako se pretpostavi, da iz žarišta istjecaju čestice pod kutom, čiji je otklon od okomitog smjera na Sunce najviše 34^0.[5]

Na koncu par riječi glede razdiobe Sunčanih pjega po heliografskoj širini u god. 1946. i 1947. U slijedećoj skrižaljci unešen je procentualni broj ukupno zapaženih skupina, na obim polutkama, po zonama od 10^0 do 10^0 heliogr. širine, za svaku od zadnjih triju godina:

	0^0 do 10^0	11^0 do 20^0	21^0 do 30^0	preko 30^0
1945	4	41	45	10
1946	8	52	31	9
1947	20	54	22	4

[3] »Nature«, № 4092 od 19. IV. 1947.
[4] vidi »Prirodu«, 1946, br. 3 i 6, te 1947, br. 3.
[5] G. Abetti, Solar Physics (Handbuch der Astrophysik, sv. II, p. 212)

Jasno se razabire, da je tokom razdoblja 1945./47. broj skupina u višim heliogr. širinama bivao sve manji i manji, a u niskim širinama sve veći. U god. 1947. bio je primijećen tucet pjega čak u posve niskim širinama od 3^0 do 4^0, što je inače dosta rijetko.

Pojava, da pjege tokom razvoja periodske Sunčane djelatnosti iz viših širina sele na niže, odgovara poznatom Spörerovom zakonu.

Što se tiče raspodjele pjega po pojedinim Sunčanim polutkama, to za obje godine 1946. i 1947. proizlazi isti omjer od okruglo $46^0/_0$ skupina na sjevernoj prema $54^0/_0$ na južnoj polutci. Nesimetričnost u razdiobi pjega po polutkama je dakle dosta neznatna. Tome nasuprot imala je u godini 1944. i 1945. južna polutka dvaput više skupina nego li sjeverna. Prema istraživanjima W. Brunnera i M. Waldmeiera ta se pojava u godini 1944./45. ima tumačiti time, što je Sunčana djelatnost sjeverne polutke zaostala u svom razvoju prema onoj na južnoj. Analogni slučaj primijetili su spomenuti švicarski astronomi u pogledu protuberanca na Suncu.[6] Moralo bi se dakle očekivati, ako ista razlika u fazi razvitka obiju polutki bude i dalje potrajala, da će Sunčana aktivnost u posljednjem toku ciklusa na južnoj polutci ranije da spadne, i prema tome da se tada na sjevernoj polutci pokaže razmjerno veći broj pjega. Ali s druge strane postoji i 80-godišnja perioda u pogledu kolebanja raspodjele pjega[7] po polutkama, prema kojoj je sadašnje razdoblje sklono razvijanju jačih žarišta aktivnosti baš na južnoj hemisferi. Ostaje dakle da se vidi, hoće li u nastajnim godinama jače doći do izražaja ta 80-godišnja perioda, — dakle jača aktivnost južne hemisfere Sunca —, ili pak gore spomenuto zakašnjenje u fazi, po kojem bi trebala sjeverna hemisfera da bude aktivnija.

---

[6] Astronom. Mitteilungen, Zürich, № 144 i 148.

[7] W. Brunner, Langperiodische Änderung des Verhältnisses der Fleckenhäufigkeit der N- zur S-halbkugel von 1853—1944, Astr. Mitteilungen, № 144

SOLAR SPOTS IN THE YEARS 1946 AND 1947

The present paper deals with the Sunspot-frequency in the years 1946 and 1947.

The main results, obtained by direct sighting of the Sun with a binocular ZEISS, magnifying 42x, are given in a table. The variation of the sunspot relative-numbers is shown graphically in a diagram which includes the values for the previous years 1943—1945 too.

Whilst the relative numbers steadily increased already in the year 1946, the values achieved in the year 1947 were more than conspicuous: they can be compared with those observed in the year 1778, when the greatest solar activity in the series of 200 years has been recorded.

According to the diagram the maximum appeared in **1947,5** with a relative number of 132, respectively **152** if reduced to the Wolf's numbers, (coefficient $k = 1{,}15$).

Two giant groups of spots in the year 1946 and one in the year 1947 — all of which longlived — are the most remarkable feature of this period.

The frequency-distribution of spots over the sun surface exhibited nothing exceptional: the spots showed a more and more marked preference for the lower latitudes, consistently with Spörer's law of sunspot migrating during a periodic cycle of Sunactivity. A dozen of sunspots in the year 1947 have been observed along the very equator of the Sun in a latitude as low as 3^0 and 4^0.

The distribution of the spots in dependence of the hemispheres of the Sun presented in the South hemisphere only a slight excess in the number of groups over those in the Northern one, whereas in the year 1944/45 the excess amounted to 100%.

UGAO ZA SVAKOGA

OPĆI OBLIK n-TOG KORIJENA

Iz binomnog poučka:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots +$$

$$+ \binom{n}{n-1} ab^{n-1} + \binom{n}{n} b^n, \quad \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot k}$$

gdje je n kakavgod cio pozitivan broj, može se izvesti opći oblik za vađenje korijena bilo kojeg stupnja.

Tako dolazimo do općeg oblika, a sličan je s uobičajenim vađenjem drugog korijena (duži način!) i trećeg korijena.

Kad se vadi n-ti korijen postupa se ovako:

Radikand se podijeli na grupe po n znamenaka počam od decimalnog poteza i to nadesno i lijevo, zatim se traži najveća znamenka kojoj n-ta potencija ne premašuje broj u toj prvoj grupi nalijevo (dobro je imati pri ruci tablice potencija brojeva do 10) i kada se to suptrahira od prve grupe, spusti se druga grupa, koja se napiše iza diferencije. Ovome broju odcjepi se n-1 znamenka i takav broj dijeli se grupom

$$\binom{n}{n-1} \cdot z^{n-1}$$

(z označuje broj, koji podignut na n-tu potenciju, je suptrahend kod suptrakcije ispod prve grupe). Tada se postupa po pravilu, koje je izloženo u ovom obrascu:

$$\sqrt[n]{xy} = zs$$

$$\underline{-z^n}$$

$$v\underline{y} : \binom{n}{n-1} \cdot z^{n-1} = s$$

$$\binom{n}{n-1} \cdot z^{n-1} \cdot s$$

$$\binom{n}{n-2} \cdot z^{n-2} \cdot s^2$$

$$\binom{n}{n-3} \cdot z^{n-3} \cdot s^3$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\binom{n}{n-(n-1)} \cdot z^{n-(n-1)} \cdot s^{n-1}$$

$$s^n$$

Kod vađenja korijena iz broja sa više od $2n$ znamenaka pojavljuju se potencije brojeva od dvije i više znamenaka. Tablice sa izračunatim potencijama brojeva 1—10 mogu, se upotrebiti i za izračunavanje potencija baza većih od 10, i to tako da se baza podiže po obrascu:

$$\frac{(a\,b)^n}{a^n}$$

$$\binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot b$$

$$\binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot b^2$$

$$\binom{n}{3} \cdot a^{n-3} \cdot a^3$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot$$

$$\binom{n}{n-1} \cdot a \cdot b^{n-1}$$

$$b^n$$

u kojem se uvijek pojave potencije baza do 10, ako je broj dvoznamenkast. Ako broj ima 3 ili više znamenaka, ovaj obrazac upotrebi se svaki put u samom obrascu, gdje dolazi potencija dvoznamenkastog broja.

Primjedba. Brojevi $x\,y$ ili $a\,b$ ne predstavljaju u ovim obrascima produkt nego znamenke broja ili grupe po n znamenaka; dok se produkt ozračuje sa tačkom $x \cdot y$ i t. d.

Primjer: Izvadi peti korijen iz 70 15833,71424.

$$\sqrt[5]{70\,15833,\,71424} = 23{,}4$$

— 32 80

38_15833 : (5 · 2⁴)

24_0 . . . . $5 \cdot 2^4 \cdot 3$

7_20 . . . . $10 \cdot 2^3 \cdot 3^2$

1_080 . . . . $10 \cdot 2^2 \cdot 3^3$

810 . . . . $5 \cdot 2 \cdot 3^4$

243 . . . . 3^5

1399205

"5_79490_71424 : $(5 \cdot 23^4)$

5_59682_0 . . . . $5 \cdot 23^4 \cdot 4$

19467_20 . . . . $10 \cdot 23^3 \cdot 4^2$

338_560 . . . . $10 \cdot 23^2 \cdot 4^3$

2_9440 . . . . $5 \cdot 23 \cdot 4^1$

1024 . . . . 4^5

"000000000000

Odgovor: traženi peti korijen jest 23,4. Svakako je važno znati koji koeficijenti dolaze kod pojedinog korjena.

Dadić Žarko, uč. VII. r., Split

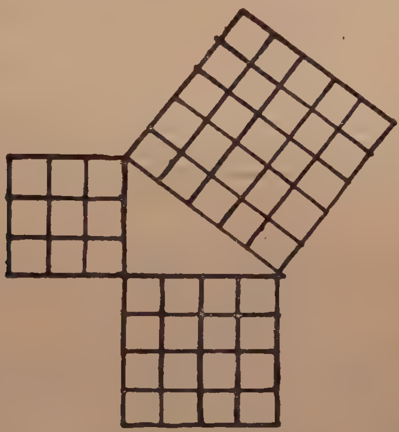
PITAGORINI BROJEVI

I.

Promatrajući kvadrate nad stranicama izvjesnog pravokutnog trokuta već su stari Egipćani opazili, da je zbroj kvadrata nad katetama jednak kvadratu nad hipotenuzom. To opažanje, izvršeno praktički na više konkretnih primjera, dovelo je Pitagoru (otpr. 582.—500. prije n. e.) do toga, da uopći to opažanje i da ga teorijski dokaže, te je tako nastao znameniti Pitagorin poučak.

Međutim, dug je i mučan put od živog opažanja konkretnih primjera do apstraktnog matematičkog poučka.

Prvi konkretni primjer, koji je još davno uočen, jest onaj, kad su katete 3 i 4, a hipotenuza 5. Sad se javila misao: ima li još koji pravokutni tvrokut, kojemu su stranice izražene u cijelim brojevima, tako da bi se i na njemu moglo vidjeti, da li i između kvadrata nad njegovim stranicama vlada onakav isti odnos. Znači treba naći takova tri cijela broja x, y i z da udovoljavaju jednadžbi $x^2 + y^2 = z^2$. *Ta* jednadžba zove se P i t a g o r i n a j e d n a d ž b a, a cjelobrojni korijeni te jednadžbe zovu se P i t a g o r i n i b r o j e v i.



Sl. 1.

Pitagora i njegovi učenici nisu znali teorijski riješiti tu jednadžbu. Oni su se zato obratili konkretnom opažanju brojeva i čisto praktički su tražili takova tri broja, koji zadovoljavaju gornju jednadžbu. Napisali su niz kvadrata:

$1^2 = 1$	$7^2 = 49$
$2^2 = 4$	$8^2 = 64$
$3^2 = 9$	$9^2 = 81$
$4^2 = 16$	$10^2 = 100$
$5^2 = 25$	$11^2 = 121$
$6^2 = 36$	$12^2 = 144$

Promatrajući ovaj niz opazili su, da se kvadrati razlikuju jedan od drugoga za neparan broj:

$1^2 + 3 = 2^2$	$7^2 + 15 = 8^2$
$2^2 + 5 = 3^2$	$8^2 + 17 = 9^2$
$3^2 + 7 = 4^2$	$9^2 + 19 = 10^2$
$4^2 + 9 = 5^2$	$10^2 + 21 = 11^2$
$5^2 + 11 = 6^2$	$11^2 + 23 = 12^2$
$6^2 + 13 = 7^2$	$12^2 + 25 = 13^2$

U nizu tih neparnih brojeva, za koliko se jedan kvadrat razlikuje od drugoga, moraju se nalaziti i takovi neparni brojevi, koji su ujedno i kvadrati, a to su neparni brojevi: 9 (ujedno kvadrat od 3), 25 (ujedno kvadrat od 5), 49 (ujedno kvadrat od 7) itd. Izvade li se iz niza kvadrata svi ovi slučajevi, dobiva se Pitagorin niz Pitagorinih brojeva:

$$\begin{array}{rcl}
4^2 + 9 = 5^2 & \text{ili} & 4^2 + 3^2 = 5^2 \\
12^2 + 25 = 13^2 & \text{ili} & 12^2 + 5^2 = 13^2 \\
24^2 + 49 = 25^2 & \text{ili} & 24^2 + 7^2 = 25^2 \\
40^2 + 81 = 41^2 & \text{ili} & 40^2 + 9^2 = 41^2 \\
60^2 + 121 = 61^2 & \text{ili} & 60^2 + 11^2 = 61^2 \\
84^2 + 169 = 85^2 & \text{ili} & 84^2 + 13^2 = 85^2
\end{array}$$

itd. u beskonačnost.

Time je Pitagora sa svojim učenicima pokazao, da ima beskonačno mnogo primjera u cijelim brojevima, koji potvrđuju hipotezu o tome, da je zbroj kvadrata nad katetama jednak kvadratu nad hipotenuzom.

Karakteristično je za Pitagoru i njegove učenike to, što se oni nisu zadovoljili samo time, da u praktičnoj primjeni iskoriste konkretne slučajeve uočenog poučka, već su nastojali, a i uspjeli, da poučak i općenito, teorijski dokažu. Oni su time osobito zaslužni, da se geometrija iz početne faze zornog uviđanja geometrijskih zakonitosti i njihove primjene u konkretnoj životnoj praksi uzdignula do teorijske znanosti, te se njezina otkrića primjenjuju otada u naučnoj teoriji omogućujući joj sve veći razvoj.

Uopćavajući svoja opažanja o odnosu kvadrata nad stranicama pravokutnog trokuta u svoj znameniti poučak, Pitagorejci su ujedno nastojali da uopće i svoja opažanja o odnosima, koji vladaju između Pitagorinih brojeva, te da tako nađu neko općenito rješenje Pitagorine jednadžbe. Zato su promatrali nizove kvadrata i analizirali ih u sastavne dijelove.

$$\begin{array}{rcl}
4^2 + 3^2 = 5^2 & \text{ili} & (1.4)^2 + (1.2 + 1)^2 = (1.4 + 1)^2 \\
12^2 + 5^2 = 13^2 & \text{ili} & (3.4)^2 + (2.2 + 1)^2 = (3.4 + 1)^2 \\
24^2 + 7^2 = 25^2 & \text{ili} & (6.4)^2 + (3.2 + 1)^2 = (6.4 + 1)^2 \\
40^2 + 9^2 = 41^2 & \text{ili} & (10.4)^2 + (4.2 + 1)^2 = (10.4 + 1)^2 \\
60^2 + 11^2 = 61^2 & \text{ili} & (15.4)^2 + (5.2 + 1)^2 = (15.4 + 1)^2 \\
84^2 + 13^2 = 85^2 & \text{ili} & (21.4)^2 + (6.2 + 1)^2 = (21.4 + 1)^2 \text{ itd.}
\end{array}$$

Kakova zakonitost vlada u nizu ovih Pitagorinih brojeva?

Najjednostavniji je srednji niz brojeva. On se dobiva, ako se redom brojevi od 1 do n množe sa 2 i uvijek se pribroji 1. Dakle jedan od Pitagorinih brojeva može se označiti $x = 2n + 1$, te označuje manju katetu. U kakvom odnosu stoji mjerni broj veće katete prema mjernom broju pripadne manje katete? Vidimo da su mjerni brojevi veće katete dobiveni tako, da su brojevi 1, 3, 6, 10, 15, 21 itd. pomnoženi uvijek sa 4. Brojevi 1, 3, 6, 10, 15, 21 itd. dobiju se ovako:

$$\begin{array}{rcl}
1 &=& 1 \\
3 &=& 1 + 2 \\
6 &=& 1 + 2 + 3 \\
10 &=& 1 + 2 + 3 + 4 \\
15 &=& 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \\
21 &=& 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6
\end{array}$$

Dakle brojevi 1, 3, 6, 10, 15, 21 itd., jesu zbrojevi od n prirodnih brojeva. Pitagorina škola je znala da je zbroj od prvih n prirodnih brojeva:

$$S_n = \frac{(1 + n) \cdot n}{2}.$$

Ako se to pomnoži sa 4, dobiva se $2n(1 + n)$, a to je jednako $2n^2 + 2n$. Pitagorejci su dakle pronašli opažanjem: ako je manja kateta $x = 2n + 1$, onda veća kateta mora biti $y = 2n^2 + 2n$.

Iz promatranja mjernih brojeva hipotenuze vidi se, da je hipotenuza uvijek za 1 veća od veće katete.

Na osnovi ovih razmatranja Pitagorejci su postavili ovo rješenje Pitagorine jednadžbe:

$$x = 2n + 1, \qquad y = 2n^2 + 2n, \qquad z = 2n^2 + 2n + 1$$

Po ovome, mjerni brojevi manje katete i hipotenuze su uvijek neparni brojevi, a mjerni broj veće katete je uvijek paran broj. Osim toga, hipotenuza je uvijek za 1 veća od veće katete.

II.

Platon (429.—348. prije n. e.) i njegovi učenici pošli su dalje. Oni su opazili, da su Pitagorejci u rješavanju problema uzeli u obzir samo razliku između dva susjedna kvadrata u nizu kvadrata t. j. takova dva kvadrata kojih se drugi korijeni razlikuju za 1. Zato su Platon i njegovi učenici počeli promatrati niz kvadrata na drugi način i to tako, da su promatrali razliku između dva kvadrata kojih se korijeni razlikuju za 2.

$$\begin{aligned} 1^2 + (3 + 5) &= 3^2 & \qquad 5^2 + (11 + 13) &= 7^2 \\ 2^2 + (5 + 7) &= 4^2 & \qquad 6^2 + (13 + 15) &= 8^2 \\ 3^2 + (7 + 9) &= 5^2 & \qquad 7^2 + (15 + 17) &= 9^2 \\ 4^2 + (9 + 11) &= 6^2 & \qquad 8^2 + (17 + 19) &= 10^2 \end{aligned}$$

Razlika je ovdje, jer je jednaka zbroju dvaju neparnih brojeva, uvijek paran broj. U nizu tih parnih razlika moraju se nalaziti i takovi parni brojevi, koji su ujedno i kvadrati, a to su parni brojevi: 16 (ujedno kvadrat od 4), 36 (ujedno kvadrat od 6), 64 (ujedno kvadrat od 8) itd. Izvade li se iz niza ovi slučajevi dobiva se Platonov niz Pitagorinih brojeva:

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= 5^2 \\ 8^2 + 6^2 &= 10^2 \\ 15^2 + 8^2 &= 17^2 \\ 24^2 + 10^2 &= 26^2 \end{aligned}$$

itd. u beskonačnost.

I Platonova škola nastojala je da uopći ova rješenja Pitagorine jednadžbe, pa su dobivena rješenja razložili ovako:

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= 5^2 \text{ ili } & 3^2 + (2.2)^2 &= (1 + 3 + 1)^2 \\ 8^2 + 6^2 &= 10^2 \text{ ili } & (3 + 5)^2 + (3.2)^2 &= (1 + 3 + 5 + 1)^2 \\ 15^2 + 8^2 &= 17^2 \text{ ili } & (3 + 5 + 7)^2 + (4.2)^2 &= (1 + 3 + 5 + 7 + 1)^2 \\ 24^2 + 10^2 &= 26^2 \text{ ili } & (3 + 5 + 7 + 9)^2 + (5.2)^2 &= (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 1)^2 \end{aligned}$$

Najjednostavnije je uopćiti srednji niz Pitagorinih brojeva. On se dobiva ako se redom brojevi od 2 do n množe sa 2. Dakle jedan od Pitagorinih brojeva može se označiti $x = 2n$. U kakvom odnosu stoji veličina druge katete i hipoteze prema ovoj veličini? Druga kateta dobiva se kao zbroj od n neparnih brojeva brojnog niza minus 1, a hipotenuza se dobije kao zbroj od n neparnih brojeva brojnog niza plus 1. Već je Pitagorina škola znala izračunati zbroj S od prvih n neparnih prirodnih brojeva: $S = n^2$. Prema tome mogu se gornji kvadrati napisati i ovako:

$$\begin{aligned} 3^2 + 4^2 &= 5^2 \text{ ili } & (2^2 - 1)^2 + (2.2)^2 &= (2^2 + 1)^2 \\ 8^2 + 6^2 &= 10^2 \text{ ili } & (3^2 - 1)^2 + (3.2)^2 &= (3^2 + 1)^2 \\ 15^2 + 8^2 &= 17^2 \text{ ili } & (4^2 - 1)^2 + (4.2)^2 &= (4^2 + 1)^2 \\ 24^2 + 10^2 &= 26^2 \text{ ili } & (5^2 - 1)^2 + (5.2)^2 &= (5^2 + 1)^2 \end{aligned}$$

Platonova škola je uopćila ove konkretne slučajeve i dobila ovo rješenje Pitagorine jednadžbe:

$$x = 2n, \; y = n^2 - 1, \; z = n^2 + 1.$$

III.

Euklid (oko 300. prije n. e.) mogao je Pitagorin i Platonov rad sad nastaviti dalje. Ako se iz Platonova niza kvadrata ispišu jednadžbe iz parnih redaka:

$$8^2 + 6^2 = 10^2$$
$$24^2 + 10^2 = 26^2 \text{ itd.},$$

vidi se, da Pitagorini brojevi u tim jednadžbama imaju zajedničku mjeru 2, te ako se ti Pitagorini brojevi podijele s tom zajedničkom mjerom 2, onda se dobiva Pitagorin niz Pitagorinih brojeva.

Sl. 2.

Ako to grafički predočimo, vidjet ćemo da množenje Pitagorinih brojeva brojem 2 znači proporcionalno, u ovom slučaju dvostruko, povećanje stranica pravokutnog trokuta, kojim se dobiva sličan trokut sa 2 puta većim stranicama i sa 2^2 t. j. 4 puta većom površinom. Kvadrati nad stranicama većeg trokuta 4 puta su veći od kvadrata nad stranicama manjeg trokuta. Jasno je dakle, s geometrijske strane gledajući, da mi smijemo Pitagorine brojeve pomnožiti nesamo sa 2 nego s bilo kojim drugim brojem.

Ali Euklidu je moglo i aritmetičko opažanje Pitagorinih brojeva dati potvrdu za to.

a)

Nastavi li se s Pitagorinom školom tražiti u nizu razlika između kvadrata takove razlike, koje su sastavljene od 3 susjedna neparna broja brojnog niza naći će se:

$$12^2 + (25 + 27 + 29) = 15^2 \quad \text{ili} \quad 12^2 + 9^2 = 15^2 \quad \text{ili} \quad (3.\ 4)^2 + (3.3)^2 = (3.\ 5)^2$$
$$36^2 + (73 + 75 + 77) = 39^2 \quad \text{ili} \quad 36^2 + 15^2 = 39^2 \quad \text{ili} \quad (3.12)^2 + (3.5)^2 = (3.13)^2$$
$$72^2 + (145 + 147 + 149) = 75^2 \quad \text{ili} \quad 72^2 + 21^2 = 75^2 \quad \text{ili} \quad (3.24)^2 + (3.7)^2 = (3.25)^2$$

Tako dobivamo iste brojeve, koje je Pitagorina škola našla samo pomnožene sa 3, t. j.

$$x = 3\,(2n^2 + 1),\ y = 3\,(2n^2 + 2n),\ z = 3\,(2n^2 + 2n + 1).$$

b)

Nastavi li se s Platonovom školom tražiti u nizu razlika između kvadrata takove razlike, koje su sastavljene od 4 susjedna neparna broja brojnog niza, naći će se:

$$6^2 + (13 + 15 + 17 + 19) = 10^2 \text{ ili } 6^2 + 8^2 = 10^2 \text{ ili } (2.\ 3)^2 + (2.4)^2 = (2.\ 5)^2$$
$$16^2 + (33 + 35 + 37 + 39) = 20^2 \text{ ili } 16^2 + 12^2 = 20^2 \text{ ili } (2.\ 8)^2 + (2.6)^2 = (2.10)^2$$
$$30^2 + (61 + 63 + 65 + 67) = 34^2 \text{ ili } 30^2 + 16^2 = 34^2 \text{ ili } (2.15)^2 + (2.8)^2 = (2.17)^2$$

Tako dobivamo iste brojeve, koje je Platonova škola našla samo pomnožene sa 2 t. j. $x = 2.2n$, $y = 2\ (n^2 - 1)$, $z = 2\ (n^2 + 1)$.

c)

Nastavimo li tako dalje, onda ćemo dobiti kod kvadrata od x i z koji se razlikuju za 5 susjednih neparnih brojeva, da je:

$$x = 5\ (2n + 1),\ y = 5\ (2n^2 + 2n),\ z = 5\ (2n^2 + 2n + 1),$$

dakle Pitagorin niz brojeva pomnožen sa 5,

kod kvadrata od x i z, koji se razlikuju za 6 susjednih neparnih brojeva, da je

$$x = 3.2n,\ y = 3\ (n^2 - 1),\ z = 3\ (n^2 + 1),$$

dakle Platonov niz brojeva pomnožen sa 3,

kod kvadrata od x i z, koji se razlikuju za 7 susjednih neparnih brojeva, da je

$$x = 7\ (2n + 1),\ y = 7\ (2n^2 + 2n),\ z = 7\ (2n^2 + 2n + 1),$$

dakle Pitagorin niz Pitagorinih brojeva pomnožen sa 7,

kod kvadrata od x i z, koji se razlikuju za 8 susjednih neparnih brojeva, da je

$$x = 4.2n,\ y = 4\ (n^2 - 1),\ z = 4\ (n^2 + 1),$$

dakle Platonov niz Pitagorinih brojeva pomnožen sa 4, itd.

Tako se direktnim promatranjem kvadrata vidi i aritmetičkim putem, da se Pitagorini brojevi smiju pomnožiti konstantnom količinom k (prirodan broj).

d)

Već je pokazano, da parni retci iz Platonova niza kvadrata podijeljeni s 2 daju Pitagorine brojeve iz Pitagorinog niza kvadrata. To je razumljivo zbog toga, što je kod Pitagore x (manja kateta) uvijek neparan broj. Ako pak u Platonovu rješenju $x = 2n$, $y = n^2 - 1$, $z = n^2 + 1$ stavimo za n neparan broj, onda su i x i y i z parni, te se dadu podijeliti sa 2. Prema tome bi se Pitagorini brojevi, koje je otkrio Pitagora, mogli dobiti i iz Platonova rješenja ovako:

$$x = n,\ y = \frac{n^2 - 1}{2},\ z = \frac{n^2 + 1}{2},$$

gdje je n uvijek neparan broj.

Dakle Platonovo rješenje je savršenije od Pitagorina, jer sadrži u sebi i one brojeve, koje je otkrio Pitagora.

Euklid je dakle dosad mogao da uoči:

1) da se u Platonovu rješenju sadrži i Pitagorino, te da se prema tome može kao općenito rješenje smatrati rješenje

a) $x = n,\ y = \dfrac{n^2 - 1}{2},\ z = \dfrac{n^2 + 1}{2}$, ako je n uvijek neparan broj, te

b) $x = 2n,\ y = n^2 - 1,\ z = n^2 + 1$, ako je n uvijek paran broj, i

2) da se Pitagorini brojevi smiju pomnožiti nesamo sa 2 nego s bilo kojim prirodnim brojem k.

No zasluga Euklidova nije samo u tome, što je on dalje poopćio rješenja do kojih su došli Pitagora i Platon. Euklid je promatranjem kvadrata došao i do nečeg novog. On je ustanovio, da u rješenju $x = n$, $y = \frac{n^2 - 1}{2}$, $z = \frac{n^2 + 1}{2}$, broj n zapravo je umnožak od dva faktora n i 1, a to znači da je $n^2 - 1$ razlika kvadrata tih dvaju faktora, dok je $n^2 + 1$ zbroj kvadrata tih dvaju faktora. Dalje je Euklid ustanovio: ako se broj može osim u umnožak $n \cdot 1$ rastaviti u umnožak koja druga dva faktora $p \cdot q$, gdje su p i q različiti od n i 1 (kod složenih brojeva), da i onda vrijedi gornje rješenje. Dakle vrijedi:

$$x = p \cdot q, \; y = \frac{p^2 - q^2}{2}, \; z = \frac{p^2 + q^2}{2}.$$

Ako se uzme u obzir još i to, da se gornji brojevi smiju pomnožiti s konstantnom količinom k, to je onda Euklid konačno dobio ovo rješenje Pitagorine jednadžbe:

$$x = k \cdot p \cdot q, \; y = \frac{k}{2}(p^2 - q^2) \; z = \frac{k}{2}(p^2 + q^2)$$

Ako se u gornje rješenje stavi $k = l$, $p = n$, $q = l$, dobiva se rješenje za Pitagorin niz Pitagorinih brojeva: $x = n$, $y = \frac{p^2 - 1}{2}$, $z = \frac{n^2 + 1}{2}$. Ako se stavi $k = 2$, $p = n$, $q = 1$ dobiva se rješenje za Platonov niz Pitagorinih brojeva: $x = 2n$, $y = n^2 - 1$, $z = n^2 + 1$. Ako su p i q djeljivi istim brojem, onda će x, y i z imati zajedničku mjeru, a ako se x, y i z tom zajedničkom mjerom podijele dobivaju se rješenja poznata iz Pitagorina i Platonova niza Pitagorinih brojeva. Dakle p i q ne smiju imati zajedničke mjere, pa će se dobiti sasvim novi Pitagorini brojevi. Time Euklidovo rješenje kombinacijom raznih vrijednosti od k, p i q sadrži u sebi sve Pitagorine brojeve.

Sva su ova rješenja, Pitagorino, Platonovo i Euklidovo, bazirana na konkretnom opažanju posebnih brojeva u brojnom nizu.

Međutim matematika se od konkretnih predodžbi uzdizala do sve viših apstrakcija, te je u daljnjem svom razvoju riješila Pitagorinu jednadžbu općenito teorijski.

IV.

Teorijsko rješenje Pitagorine jednadžbe:

$$x^2 + y^2 = z^2$$
$$z^2 - y^2 = x^2$$
$$\text{t. j. } \frac{z + y}{x} = \frac{x}{z - y}.$$

Stavimo li $$\frac{z + y}{x} = \frac{p}{q} = \frac{x}{z - y}$$

gdje p i q znače cijele brojeve i gdje je $p > q$, to je:

$z + y = \frac{p}{q} x$, $z - y = \frac{q}{p} x$. Odatle izlazi:

$$y = \frac{1}{2} x \left(\frac{p}{q} - \frac{q}{p}\right) = \frac{p^2 - q^2}{2pq} \cdot x$$

$$z = \frac{1}{2} x \left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p}\right) = \frac{p^2 + q^2}{2pq} \cdot x$$

Dakle će y i z zajedno s x biti cijeli brojevi, ako je x djeljiv sa $2pq$ t. j. $x = 2pq \cdot k$ a tada će biti $y = (p^2 - q^2)\, k$, $z = (p^2 + q^2)\, k$.

V.

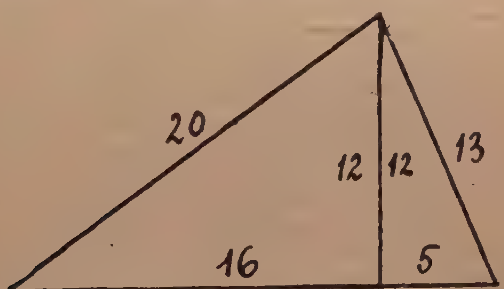
Vidjeli smo kako je iz prakse, iz živog opažaja, nastala apstraktna misao, teorija. No teorija ne bi vrijedila sama za sebe ništa, kad ne bi mogla da se ponovno vrati u praksu, da se iskoristi u praktičnoj primjeni.

Različita je bila primjena Pitagorinih brojeva u raznim razdobljima historije čovječanstva. Egipćani su ih iskorištavali za premjeravanje zemljišta i kod gradnje piramida, Pitagora ih je iskorištavao u svrhu dokazivanja i provjeravanja svog glasovitog stavka itd.

Danas se mogu Pitagorini brojevi primijeniti praktično u geometrijskoj nastavi prigodom zadavanja geometrijskih zadataka, ako u tim zadacima dolazi u obzir razrješavanje pravokutnog trokuta u cijelim brojevima. Većina zadataka iz planimetrije, a naročito iz stereometrije sadrži u sebi rješavanje pravokutnog trokuta. Tako Pitagorinim brojevima mogu biti određeni na pr. 1) visina stošca, polumjer baze i izvodnica, 2) polovica diagonale kvadratične baze četverostrane piramide, visina, te pobočni brid piramide itd.

Za praktičnu uporabu možemo si izraditi tablicu Pitagorinih brojeva

$3^2 + 4^2 = 5^2$	$12^2 + 35^2 = 37^2$	$17^2 + 144^2 = 145^2$
$5^2 + 12^2 = 13^2$	$12^2 + 16^2 = 20^2$	$18^2 + 80^2 = 82^2$
$6^2 + 8^2 = 10^2$	$13^2 + 84^2 = 85^2$	$18^2 + 24^2 = 30^2$
$7^2 + 24^2 = 25^2$	$14^2 + 48^2 = 50^2$	$19^2 + 180^2 = 181^2$
$8^2 + 15^2 = 17^2$	$15^2 + 112^2 = 113^2$	$20^2 + 99^2 = 101^2$
$9^2 + 40^2 = 41^2$	$15^2 + 20^2 = 25^2$	$21^2 + 220^2 = 221^2$
$9^2 + 12^2 = 15^2$	$15^2 + 36^2 = 39^2$	$21^2 + 28^2 = 35^2$
$10^2 + 24^2 = 26^2$	$16^2 + 63^2 = 65^2$	$21^2 + 72^2 = 75^2$
$11^2 + 60^2 = 61^2$	$16^2 + 30^2 = 34^2$	itd.



Sl. 3.

Ako se hoće zadati primjer sa Heronovom formulom u cijelim brojevima, da i rezultat bude cio broj onda možemo kombinirati ovako: Visina rastavlja svaki trokut na dva pravokutna trokuta, kojima je ona visina zajednička kateta. Treba iz tablice uzeti dva slučaja (retka) Pitagorinih brojeva, tako da u svakom od njih bude sadržan isti broj kao kateta. Na slici br. 3. nacrtan je jedan takav primjer. Iz njega se može napraviti ovaj zadatak: Izračunaj pomoću Heronove formule površinu trokuta kojemu su stranice: a = 21 cm, b = 13 cm, c = 20 cm.

Rješenje:

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{27 \cdot 6 \cdot 14 \cdot 7} = \sqrt{15876} = 126 \text{ cm}^2.$$

Vješti praktičari naći će još mnogo drugih slučajeva za praktičnu primjenu Pitagorinih brojeva u matematičkoj nastavi.

Najopćenitija praktična primjena cjelokupnog ovog razmatranja o Pitagorinim brojevima neka bude u tome, što smo se uvjerili, da i u području matematike, dakle jedne od najapstraktnijih nauka, prva misao mora polaziti od živog opažanja konkretnih očitovanja brojeva i geometrijskih oblika, da bi došla do čistih matematičkih apstrakcija!

Martin Robotić, Šibenik

ODREĐIVANJE KUTOVA TROKUTA IZ JEDNADŽBI STRANICA*

Obično se kutovi trokuta u analitici određuju iz crteža, ili se računskim putem nađu koordinate vrhova, zatim stranice i napokon trigonometrijski kutovi.

Pokazat ću kako se mogu naći jednostavni analitički kriteriji kojima se numerički dolazi brzo do rezultata, i to metodama koje se mogu upotrebiti u srednjoj školi.

I) Jednostavni izvod kriterija za vrstu trokuta i za vrstu kutova.

Orijentiramo li u pravokutnom koordinatnom susatvu dva ukrštena pravca

$$y = a_1 x + b_1 \qquad y = a_2 x + b_2$$

prema gore[1], t. j. da kutovi α_k $(k = 1, 2)$ pravaca prema $+X$ leže u intervalu $0 < \alpha_k < 180^0$, onda je orijentirani kut $\varphi_3 = \alpha_1 - \alpha_2$ potpuno određen formulom

$$tg\, \varphi_3 = \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2} \tag{1}$$

gdje se koeficijent smjera a_1 odnosi uvijek na pravac s većim kutom α_1 prema $+X$, pa se za a_1 mora uzeti veći koeficijent smjera ako su koeficijenti smjera jednako označeni, a negativni ako su nejednako označeni. Zamijenimo li indekse u (1), dobit ćemo sukut $180^0 - \varphi_3$ orijentiranog kuta φ_3.

Ako ova dva ukrštena pravca presiječemo još s trećim $y = a_3 x + b_3$ izvan njihova sjecišta, onda ova tri pravca određuju trokut i tri orijentirana kuta φ_k $(k = 1, 2, 3)$, od kojih su dva jednaka dvjema unutrašnjim kutovima trokuta, a treći orijentirani kut je vanjski, dakle sukut trećeg unutrašnjeg kuta. Vrh ovog unutrašnjeg kuta — (koji je ujedno i sukut orijentiranog kuta) — kao sjecište pravaca s najvećim i najmanjim kutom prema $+X$, nalazi se u općem slučaju vazda između ostala dva vrha trokuta, od kojih je jedan najviši s najvećom ordinatom, a drugi najniži s najmanjom ordinatom u koordinatnom sustavu. Uzmemo li, da je srednji vrh trokuta baš vrh kuta β, onda je ovaj kut jednak sukutu orijentiranog kuta φ_2, pa imamo u vezi s (1):

$$\left.\begin{aligned} &\alpha = \varphi_1, && \beta = 180^0 - \varphi_2, && \gamma \equiv \varphi_3 \\ &tg\,\alpha = \frac{a_2 - a_3}{1 + a_2 a_3}, && tg\,\beta = \frac{a_3 - a_1}{1 + a_3 a_1}, && tg\,\gamma = \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1 a_2}{}^{2} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

---

* Redakcija GLASNIKA primila je člančić *Analitički uslovi za tupouglost i oštrouglost trougla* od prof. Miroslava Živkovića iz Vršca, ali nekoliko mjeseci kasnije nego što je stigao gornji članak Peruzovića. Možda ćemo jednom prilikom i taj člančić štampati, pa eventualno i još čiji, ako nam stigne.

[1] ili da najkraćom „+" vrtnjom oko sjecišta pravac s manjim kutom α_2 prema $+X$ padne u pravac s većim kutom α_1 prema $+X$, u skladu s postankom kutova α_k $(k = 1, 2)$ najkraćom „+" vrtnjom osi $+X$ oko njihovih vrhova.

[2] Druga formula nastaje iz prve cikličkom zamjenom brojeva α, β, γ odnosno indeksa 1, 2, 3, pa ćemo, ubuduće, pisati samo po jednu formulu u trokutu, dok ostale dvije prepuštamo čitaocu da ih vazda napiše.

Iz desne strane poznatog obrasca:

$$tg\,\alpha + tg\,\beta + tg\,\gamma = tg\,\alpha\, tg\,\beta\, tg\,\gamma, \quad \text{za} \quad \alpha + \beta + \gamma = 180^0 \tag{3}$$

vidi se lako, što je i inače očevidno, da će trokut biti pravokutan, oštrokutan ili tupokutan, već prema znaku u relaciji:

$$tg\,\alpha\, tg\,\beta\, tg\,\gamma \begin{matrix} = \pm\infty \\ > 0 \\ < \end{matrix} \Bigg\} \tag{4}$$

Zamjenom (2) u (4) dobiva (4) drugi oblik:

$$\frac{(a_1 - a_2)\,(a_2 - a_3)\,(a_3 - a_1)}{(1 + a_1 a_2)\,(1 + a_2 a_3)\,(1 + a_3 a_1)} \begin{matrix} = \pm\infty \\ > 0 \\ < \end{matrix} \tag{5}$$

Po komutativnom zakonu predznak nazivnika u (5) ne će zavisiti o poređaju indeksa, jer su a_k $(k = 1, 2, 3)$ faktori u jednako građenim binomima oblika $1 + a_k\, a_h$, dok promjena indeksa izaziva promjenu predznaka brojnika, jer za diferenciju $a_k - a_h$ ne vrijedi komutativni zakon. Budući da su a_k općenito različiti konačni brojevi, brojnik će biti konačan, pa da trokut bude pravokutan, mora biti prema (4) i (5):

$$(1 + a_1 a_2)\,(1 + a_2 a_3)\,(1 + a_3 a_1) = 0 \tag{6}$$

Iz (3) izlazi da samo jedan faktor u (6) može da bude nula, jer takav jedan faktor izjednačen s nulom daje inače analitički uvjet za okomitost dvaju pravaca, a trokut može da ima samo jedan pravi kut. Nazivnik razlomka u (5) očito može da bude još pozitivan i negativan, ali prijelazom preko nule, koja prema (6) odgovara pravokutnom trokutu kao granici između tupokutnih i oštrokutnih trokuta. Kojoj vrsti trokuta pripada pozitivan predznak, lako uviđamo iz slučaja, kad su sva tri a_k jednako označena; tada su sva tri orijentirana kuta φ_k oštra (razlika dvaju oštrih ili dvaju tupih kutova vazda je oštar kut), pa jedan kut trokuta mora biti tup — kao sukut oštrog orijentiranog kuta prema (2) —, a trokut mora biti tupokutan i produkt u (6) pozitivan. Zato kao kriterij za vrstu trokuta vrijedi relacija:

$$(1 + a_1 a_2)\,(1 + a_2 a_3)\,(1 + a_3 a_1) \begin{matrix} < \\ = \\ > \end{matrix} 0 \tag{7},$$

gdje se znakovi po redu odnose na oštrokutan, pravokutan i tupokutan trokut.

Iz (7) i (5), u skladu sa numeracijom pravaca, slijedi da je brojnik u (5) uvijek negativan, ako samo poređaj indeksa odgovara kutovima trokuta, dakle:

$$(a_1 - a_2)\,(a_2 - a_3)\,(a_3 - a_1) < 0 \tag{8}$$

S druge strane, za oštrokutan trokut iz (2) proširivanjem izlazi:

$$tg\,\alpha = \frac{(a_1 - a_2)\,(a_2 - a_3)\,(a_3 - a_1)}{(a_1 - a_2)\,(1 + a_2 a_3)\,(a_3 - a_1)} > 0, \ldots, \ldots \tag{9}$$

Kako su brojnici u (9) prema (8) negativni, moraju i nazivnici biti negativni. Da α bude oštar, mora zato biti:

$$(a_1 - a_2)\,(1 + a_2 a_3)\,(a_3 - a_1) < 0. \tag{10}$$

Relacije (10) daju napokon kriterij za vrstu unutrašnjih kutova u trokutu. Ako koeficijenti a_k zadovoljavaju sve tri nejednadžbe (10), onda su sva tri kuta oštra; međutim, ako ne zadovoljavaju jednu od tih nejednadžbi (u kojoj se mijenja znak), onda je pripadni kut trokuta tup, dok prijelaz jedne od nejednadžbi u jednadžbu znači da je pripadni kut pravi. Utvrdimo li pomoću (7) da je trokut oštrokutan, onda je u konkretnom slučaju suvišno ispitivanje kutova iz (10). Kod pravokutnog trokuta se vidi odmah, da su dva koeficijenta smjera negativno recipročna, pa ne dolazi u obzir (7) i (10). Međutim, kad smo pomoću (7) prepoznali tupokutan trokut, onda treba pribjegnuti relacijama (10) do jednadžbe pomoću koje otkrivamo tupi kut. U svakom slučaju, dovoljno je odrediti predznake u (7) i (10) bez izračunavanja apsolutnih vrijednosti. Potpuni sklad relacija (7) i (10) izlazi uvrštavanjem (5) i (9) u (3):

Uz negativne jednake brojnike daju odmah nazivnici lijeve strane tako dobivene jednadžbe kriterije za vrstu kutova, a nazivnik desne strane kriterij za vrstu trokuta.

Kriteriji (7) i (10) ne zavise o tome kojim su redom označeni pravci, što se lako vidi, ako se postavi, na pr.:

$$\left.\begin{array}{lll} a'_1 \equiv a_2, & a'_2 \equiv a_3, & a'_3 \equiv a_1 \\ \alpha' \equiv \beta, & \beta' \equiv \gamma, & \gamma' \equiv \alpha \end{array}\right\} \tag{11}$$

Tada je primjenom (7) i (10) u vezi sa (11):

$$\alpha' \ldots (a'_1 - a'_2)\,(1 + a'_2 a'_3)\,(a'_3 - a'_1) = (a_2 - a_3)\,(1 + a_3 a_1)\,(a_1 - a_2) \ldots \beta \ldots \tag{10*}$$

$$(1 + a'_1 a'_2)\,(1 + a'_2 a'_3)\,(1 + a'_3 a'_1) = (1 + a_2 a_3)\,(1 + a_3 a_1)\,(1 + a_1 a_2) \tag{7*}$$

kao što i mora biti, jer je to u samoj naravi cikličke zamjene. Kad je utvrđena vrsta trokuta iz (7) i vrsta kutova prema (10), onda treba prema (2) još izračunati kutove.

Kriteriji (7) i (10) mogu se primijeniti i na posebne slučajeve, kad je jedna stranica paralelna sa jednom od koordinatnih osi. Aka je stranica, na pr. c paralelna s osi Y, onda se u relacijama (7) i (10) može da izluči zajednički faktor a_3^2, o kojemu ne zavisi predznak lijeve strane nejednadžbi (što se inače vidi i iz (9) kad se razlomci skrate sa a_3^2. Zato se mogu (7) i (10) podijeliti sa a_3^2, pa se dobije:

$$(1 + a_1 a_2)\left(\frac{1}{a_3} + a_2\right)\left(\frac{1}{a_3} + a_1\right) \lesseqgtr 0 \tag{7''}$$

$$\left.\begin{array}{l} (a_1 - a_2)\left(\dfrac{1}{a_3} + a_2\right)\left(1 - \dfrac{a_1}{a_3}\right) < 0, \\ \left(\dfrac{a_2}{a_3} - 1\right)\left(\dfrac{1}{a_3} + a_1\right)(a_1 - a_2) < 0, \\ \left(1 - \dfrac{a_1}{a_3}\right)(1 + a_1 a_2)\left(\dfrac{a_2}{a_3} - 1\right) < 0. \end{array}\right\} \tag{10''}$$

Tek nakon ove transformacije možemo preći na granicu za

$$a_3 \to \pm\infty, \text{ jer je } \alpha_3 = 90^0.$$

II) Izravni kriterij za određivanje kutova trokuta.

Prema vezi unutrašnjih kutova trokuta i orijentiranih kutova iz (2) izlazi za kutove α_k $(k=1,2,3)$ pravaca prema $+X$:

$$\alpha_2 > \alpha_3, \quad \alpha_3 < \alpha_1, \quad \alpha_1 > \alpha_2$$

ili

$$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 \tag{12}$$

Mogu se, dakle, unutrašnji kutovi trokuta izravno naći iz (2) bez posredovanja relacija (7) i (10), ako se samo numeriraju pravci u skladu s (12), t. j., ako se sa a_1 označi koeficijent smjera onog pravca koji prema $+X$ ima najveći kut α_1, a sa a_3 onog koji sa $+X$ zatvara najmanji kut α_3. Ako sva tri a_k imaju isti predznak, onda je a_1 najveći koeficijent smjera, a za a_3 mora se uzeti najmanji koeficijent; ako su dva $+$, a jedan „—", onda je negativan a_1, a manji pozitivan je a_3; za dva „—" i jedan $+$ je a_1 veći negativan, dok je a_3 pozitivan. Kod ove se metode ne smiju pravci označiti po volji, što se može smatrati kao nedostatak prema metodi I).

I ovdje se mogu formule za unutrašnje kutove lako pamtiti cikličkom zamjenom indeksa; dovoljno je numerirati izvana tri točke kružnice, a iznutra označiti tačku 1 još sa α, 2 sa β, 3 sa γ, pa se idući po kružnici istim smjerom dobije:

$$tg\,\alpha = \frac{a_2 - a_3}{1 + a_2 a_3}, \ldots, \ldots \tag{2*}$$

dakako, uvijek uz uvjet da je provedena oznaka prema (12). Tada su α i γ vazda jednaki pripadnim orijentiranim kutovima φ_1 i φ_3, a β je sukut pripadnog orijentiranog kuta φ_2, t. j.

$$\alpha = \varphi_1, \quad \beta = 180^0 - \varphi_2, \quad \gamma = \varphi_3$$

Zato se (12) i (2) mogu smatrati kao kriteriji za izravno određivanje unutrašnjih kutova trokuta, nakon čega se može naknadno izvesti zaključak o vrsti trokuta.

Do (12) i (2) došao e B. Mihajlović kako on piše[3] »neposrednim promatranjem crteža«, što inače izravno slijedi iz (2) kako smo pokazali. Štaviše, može se iz (2) još pokazati: $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$.

I doista $\alpha + \beta + \gamma = \varphi_1 + 180^0 - \varphi_2 + \varphi_3 = 180^0$, jer je $\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 = 0$ radi $\varphi_1 + \varphi_3 = \varphi_2$, ili $\varphi_1 - \varphi_2 + \varphi_3 = (\alpha_2 - \alpha_3) - (\alpha_1 - \alpha_3) + (\alpha_1 - \alpha_2) = 0$

III) Kriteriji za vrstu kutova i za vrstu trokuta.

Na kraju ćemo nešto dužim putem — koji je u uvodu kao računski označen — doći do relacija (10) i (7), što je u sličnom obliku izveo St. Fempl[4], polazeći od općeg oblika jednadžbe pravca. Zato ćemo poći od eksplicitnog oblika jednandžbi stranica trokuta:

$$a \ldots y = a_1 + b_1, \ \ldots \ b \ldots y = a_2 x + b_2, \ \ldots \ c \ldots y = a_3 x + b_3$$

[3] Glasnik Jugoslav. prof. društva, 1940., sv. 2, knjiga 21, str. 278 do 279.

[4] Glasnik Jugoslav. prof. društva, 1940., sv. 2, knjiga 21, str. 116 do 119.

Po poučku o kosinusima

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c},$$

da kut α bude oštar, mora biti brojnik pozitivan, jer je nazivnik pozitivan, pa je $b^2 + c^2 - a^2 > 0$, ili analitički pomoću daljine dviju tačaka:

$$(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - (x_2 - x_3)^2 - (y_2 - y_3)^2 > 0 \qquad (14)$$

Ako nakon kvadriranja i reduciranja podijelimo (14) sa 2, dobit ćemo izlučivanjem zajedničkih faktora:

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) + (y_1 - y_2)(y_1 - y_3) > 0$$

i dalje: $$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\left(1 + \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \cdot \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3}\right) > 0 .$$

Radi

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = a_3 \quad \text{i} \quad \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3} = a_2$$

izlazi konačno

$$(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(1 + a_2 a_3) > 0 \qquad (15)$$

Uvrstimo li u (15) apscise vrhova trokuta:

$$x_1 = \frac{b_3 - b_2}{a_2 - a_3}, \quad x_2 = \frac{b_3 - b_1}{a_1 - a_3}, \quad x_3 = \frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}$$

i svedemo na zajednički nazivnik, dobit ćemo:

$$\frac{[a_1(b_3 - b_2) + a_2(b_1 - b_3) + a_3(b_2 - b_1)]^2}{(a_2 - a_3)^2} \cdot \frac{1 + a_2 a_3}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} > 0 \qquad (16)$$

Kako u prvom razlomku u (16) dolaze samo pozitivni kvadrati, to o njemu ne će zavisiti predznak lijeve strane u (16), pa je (16) ekvivalentna s

$$\frac{1 + a_2 a_3}{(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)} > 0 \qquad (17)$$

Budući da se radi samo o predznaku, može se (17) množenjem s kvadratom nazivnika svesti na oblik:

$$(a_1 - a_2)(a_1 - a_3)(1 + a_2 a_3) > 0 \ldots, \text{ za } \alpha, \ldots \qquad (18)$$

Pomnožimo li (18) s (-1), prepoznajemo naše relacije (10) za vrstu kutova trokuta, a množimo li relacije (10) međusobom, dobivamo:

$$(a_1 - a_2)^2 (a_2 - a_3)^2 (a_3 - a_1)^2 (1 + a_1 a_2)(1 + a_2 a_3)(1 + a_3 a_1) < 0.$$

Dijeljenjem s pozitivnim kvadratima konačno izlazi relacija (7) za vrstu trokuta.

Ova metoda-makako da je zanimljiva-, i u ovakvom skraćenom obliku je predugačka, pa imaju više izgleda za srednju školu prve dvije I i II, pogotovo, kad I metoda na kraći i elegantniji način daje isti rezultat kao III metoda. Zanimljivo je istaknuti da su učenici dali prednost I metodi, jer su uz lako pamćenje kriterija (7) i (10) pomoću cikličke zamjene indeksa mogli još i po volji numerirati pravce.

Ante Peruzović, Split

OPŠTE REŠENJE JEDNE DIOFANTOVE JEDNAČINE

Povodom 36. zadatka u ovom Glasniku, dajem opšte rešenje Diofantove jednačine

$$X^2 + PY^2 = Z^2 \tag{1}$$

u celim relativno prostim brojevima X, Y, Z, gde je P makakav ceo broj. Možemo izuzeti one vrednosti P koje imaju faktore sa ponavljanjem, jer ako je $P = P_1 q^2$, smenom Y sa $Y_1 = qY$ možemo konstantu P svesti na novu P_1 koja nema faktore sa ponavljanjem, tj.

$$X^2 + P_1 Y_1^2 = Z^2.$$

Ovo nam ograničenje uprošćava donekle samu interpretaciju problema.

U opštem slučaju P može imati parne i neparne vrednosti, a znak ćemo podrazumevati da je pozitivan, jer ako P promeni znak, vrednosti za X, Y, Z neće se promeniti, samo će X i Z uzajamno izmenjati vrednosti.

Iz (1), što možemo napisati i kao

$$PY^2 = (Z - X)(Z + X) \tag{1'}$$

imamo, za PY^2 neparno, u kom slučaju X i Z moraju biti jedno parno a drugo neparno,

$$Z - X = D \quad i \quad Z + X = S$$

odakle je

$$X = (S - D) / 2, \quad Z = (S + D) / 2;$$

dok za PY^2 parno (gde može nastupiti slučaj: a) samo P parno, *b)* samo Y parno i c) i P i Y parni), biće

$$Z - X = 2D, \quad Z + X = 2S$$

a

$$X = S - D, \quad Z = S + D$$

Iz (1′) je

$$X^2 = 4DS / P \quad i \quad Y^2 = DS / P \tag{2}$$

Ako su P_1 i P_2 makakvi faktori od P, t. j. $P = P_1 \cdot P_2$, gde jedan od faktora P_1 i P_2 može biti i jedinica, da bi desne strane od (2) bile potpun kvadrat, mora da je

$$D = P_1 d^2, \quad S = P_2 s^2 \tag{3}$$

gde d i s ne mogu imati zajedničke faktore, jer u protivnom slučaju imali bi ih i X, Y, Z što je isključeno pretpostavkom da su rešenja relativno prosta. Odatle sleduje

$$Z - X = 2P_1 d^2 \quad ili \quad Z - X = P_1 d^2, \tag{4}$$

drugim rečima, razlika $Z - X$, ako su X i Z oba neparna, jednaka je dvostrukom proizvodu nekog faktora od P i kvadrata nekog neparnog broja, odnosno, proizvodu nekog faktora od P i kvadrata neparnog broja, u slučaju da su X i Z jedno parno a drugo neparno.

I) P parno, Y može biti parno (u kom slučaju i X i Z su neparni) i neparno (gde su X i Z oba parna u kom slučaju P mora imati 2 kao faktor najmanje na drugom stepenu, što smo u početku naglasili da ih izuzimamo).

a) Y parno. Iz (1′) i (4) je

$$PY^2 = (X + 2P_1 d^2)^2 - X^2$$

$$Y = \sqrt{4P_1 d^2 (X + P_1 d^2) / P} = 2d \sqrt{(X + P_1 d^2) / P_2}$$

Zbir $X + P_1 d^2$, pošto su X i d neparni, zavisi od P da li je paran ili neparan. Da bi Y bio realan i ceo broj mora da je

$$X + P_1 d^2 = P_2 t^2$$

odnosno

$$X = P_2 t^2 - P_1 d^2$$

$$\text{(I)} \qquad Y = 2 d t$$

$$Z = P_2 t^2 + P_1 d^2$$

gde je d makoji neparan broj, koji nema nikakav zajednički faktor sa P_2, a t, kad je P_2 parno može uzimati samo parne vrednosti prirodnih brojeva, i obrnuto, kad je P_2 neparno, t može uzimati samo neparne vrednosti, izuzimajući i u jednom i u drugom slučaju vrednosti koje imaju ma koji faktor zajednički sa d.

2) *P neparno; Y* može biti a) parno i b) neparno

a) *Y parno, X* i *Z* su neparni, pa je

$$X^2 + PY^2 = (X + 2 P_1 d^2)^2$$

odnosno

$$Y = 2 d \sqrt{(X + P d) / P}$$

Zbir $X + P_1 d^2$ je paran. Za

$$X + P_1 d^2 = P_2 (2 t)^2$$

Y je realan i ceo broj. Odatle je

$$X = 4 P_2 t^2 - P_1 d^2$$

$$\text{(II)} \qquad Y = 4 d t$$

$$Z = 4 P_2 t^2 + P_1 d^2$$

gde je d makoji neparan broj (koji nema zajedničke faktore sa P_2, a $t = 1, 2, 3, \ldots$ izuzimajući one koji imaju zajedničke faktore sa d.

b) *Y neparno, PY^2* takođe je neparno, onda X i Z moraju biti jedno parno, drugo neparno. Razlika $Z - X$ *je* neparna, pa je

$$X^2 + PY^2 = (X + P_1 d^2)^2$$

odnosno

$$Y = d \sqrt{(2 X + P_1 d^2) / P_2}$$

Zbir $2 X + P_1 d^2$ je neparan. Y je realan i ceo broj samo za vrednosti

$$2 X + P_1 d^2 = P_2 (2 t + 1) \qquad t = 0, 1, 2, \ldots$$

Otuda je

$$X = \tfrac{1}{2} [P_2 (2 t + 1)^2 - P_1 d^2]$$

$$\text{(III)} \qquad Y = d (2 t + 1)$$

$$Z = \tfrac{1}{2} [P_2 (2 t + 1)^2 + P_1 d^2]$$

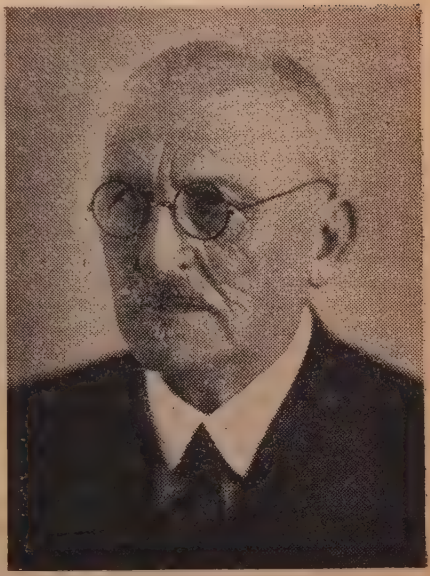
gde je d makoji neparan broj koji nema zajedničke faktore sa P_2, a $t = 0, 1, 2, \ldots$ izuzimajući vrednosti t za koje $2 t + 1$ ima zajedničke faktore sa d.

Obrasci (I), (II), (III) daju za *X, Y, Z* sva moguća rešenja Diofantove jednačine (1) u celim relativno prostim brojevima.

Dimitrije Trajić, Beograd
asistent Seismološkog zavoda Beograd - Tašmajdan

ДР. БОГДАН ГАВРИЛОВИЋ

(1864—1947)


Др. Богдан Гавриловић

6 августа 1947 умро је Нестор српских и југословенских математичара Богдан Гавриловић, пошто је пуних шездесет година провео у служби школи и науци.

Б. Гавриловић се родио у Новом Саду 20 децембра 1863 (по ст. кал.). Ту је свршио основну школу и гимназију, а као питомац Текелијина завода студирао је математику, физику и астрономију на универзитету у Будимпешти, где је 1885 године дипломирао и 1886 докторирао. После тога се бавио ради даљих студија и усавршавао у Немачкој и Швајцарској, па је 1888 године изабран за наставника Велике школе у Београду. Кроз све метаморфозе ове институције, од Велике школе до Универзитета, остао је на њој као професор математике на Техничком и Филозофском факултету пуне 53 године, све до априла 1941 (после пензионисања 1929 године као хонорарни професор). За то време је трипут ректор Универзитета, дајући тако својом школском каријером и класичан пример успона наших генерација деветнаестог и двадесетог века: његов чукундед се доселио из Херцеговине у Војводину, прадед му је био земљорадник у селу, дед учитељ и управитељ основне школе, отац професор и директор Српске гимназије у Новом Саду, он професор и ректор Универзитета у Београду.

За свој научни рад био је Богдан Гавриловић почаствован од разних научних установа: члан Српске академије наука (од 1931 до 1937 године њен претседник); дописни члан Југославенске академије знаности и уметности; дописни члан Чешког ученог друштва у Прагу; члан друштва Circolo matematico di Palermo; Dr. hon. causa Универзитета у Атини; претседник Института Николе Тесле у Београду; итд.

Својим научним радом Богдан Гавриловић припада једној периоди у развитку математике која је данас већ постала класична. После епохалних открића која су у 17-ом и 18-ом столећу учинили у егзактним наукама уопште, а у математици посебице, Њутн и Лајбниц, Ајлер, Лаплас и Лагранж, да споменемо само највеће и најпознатије — 19-ти век је био не само даље проширавање тих наука и практичних примена њихових, него и доба критицизма. Основни појмови математике нису били довољно објашњени, целокупна основа математике није била довољно фундирана. Променљиве функције, диференцијали, интеграли, т. зв. бесконачно мале величине, аксиоми геометрије и њени елементи — тачка, права и раван —, простор и континуум, аксиоми аритметике, сам број — полазни појам математике, — све је то било још недовољно објашњено, све још мистично и пребацивано из математике у филозофију и метафизику, а из ових опет

назад у математику. Све је то било нападано и брањено, објашњавано и замршавано, некоме јасно само по себи тако да не треба ни доказивати, другоме и са доказом недоказано.

19-то столеће је тако у математици имало двоструку улогу: с једне стране, да се математика даље развија и да стиче све веће поље примене у другим наукама, нарочито у техници која се рапидно развијала; с друге стране, да се критички размотре саме основе математике и строго логички фундирају. Французи Коши и Понселе, Немац Гаус и Рус Лобачевски били су први велики пионири у оба посла. За њима долазе, око средине и у другој половини 19-ог столећа немачки математичари Вајерштрас и Кантор, италијански геометри Кремона и Белтрами, енглески алгебристи Силвестер и Келе. Они су са својим савременицима — сарадницима и ученицима — отворили широка поља рада, дали дотле неслућене перспективе и у теорији и у примени, и фундирали математику на стабилној логичкој основи.

Богдан Гавриловић, директан ученик Вајерштрасов, геометар по својим наклоностима, велики поштовалац енглеских алгебриста, радио је, почевши од своје докторске тезе на свима тима пољима. Његови радови из математичке анализе односе се на најактуелнија питања теорије функција, која се онда тек стварала и развијала. Штампани у издањима Српске академије наука у Београду и Југославенске академије у Загребу, они дају нашој математичкој науци, која је била тек у повоју, печат савремености и свежине и ниво европски. Радови из геометрије односе се на ондашња најмодернија питања и проблеме аналитичке геометрије, специјално пројективне, са употребом најмодернијег научног апарата. Та питања и те методе су онда били новост у геометрији. Радови из алгебре и теорије детерминаната не уступају ни у чему радовима других математичара који су се тим бавили. Својим радом на кубним детерминантама Б. Гавриловић се налазио међу двојицом-тројицом математичара који су се тим проблемом бавили.

Својим уџбеницима *Теорија детерминаната*, *Аналитичка геометрија* одужио се у исти мах школи као наставник. Оба, а нарочито овај последњи, чинили би част свакој нацији, и многи народи, у то доба већи и срећнији од нас, нису тада таква дела имали.

Говорећи о научним радовима Богдана Гавриловића, треба споменути једну особину и карактеристику његову, данас код научних радника, нажалост, све ређу и ређу. У данашње доба специјализације могу се наћи одлични радници и стручњаци своје струке, научници који своју специјалност знају до савршенства и свој посао до виртуозности. Али, све је мањи и мањи број оних који своју науку или део науке посматрају и раде у комплеку осталих наука, који своју науку везују са другим сродним наукама, за које њихова наука није нешто изоловано, него повезано са свима осталим наукама и културним тековинама садашњице, за које је њихова наука главни део и кристализациони центар за сва остала знања, схватања и стремљења, повезана са прошлошћу и са изгледима у будућност. Та ширина и дубина схватања, тако често својствена ранијим генерацијама, све се више и више губи.

Код Богдана Гавриловића се налази она у пуној мери, о чему сведоче не само његови радови из математике, него и толики његови говори у Академији наука и Универзитету. Било да уводи у част академика историчара или филолога, било да чини комеморацију геологу или математичару, било да говори студентима о култури и задатку Универзитета, — свуда се осећа та општа култура, то синтетичко схватање свих питања у међусобној вези, из којега излази једно лично гледање на сва збивања, једно везивање у целину свих манифестација живота, једно хармонично

гледање на свет. Он је имао жив интерес за све, био је дубоко социјалан, за свакога је имао пријатељско осећање — ни за кога ни речи опорости, а камо ли дела непријатељства.

Није био лак рад наших научника у осамдесетим и деведесетим годинама прошлог века. У средини у којој се култура тек рађала, са ништавним материјалним средствима, у народу расцепканом у више држава и разних покрајина, — ту није било повољних услова ни за какав научни рад, а најмање за математичке теорије. Богдан Гавриловић је ушао у ту средину као млад научни радник, са европским схватањима науке и културе, изграђивао се даље и сав се посветио Универзитету и Науци. Он је био еминентан научни, просветни и културни радник, достојан друг наших великих трудбеника 19-ог и почетка 20-ог века, који су стварали државу и културу; који су допринели да наше младе генерације, жељне науке и научног рада, нису морале више да насумце лутају по свету и да се пласирају у туђини; који су учинили да и наш Београд буде један од центара научног рада.

Заслужује зато да га се с поштовањем сећамо и да му будемо дубоко благодарни.

Радивоје Кашанин

Научни и стручни радови акад. Б. Гавриловића

1. Аналитичка геометрија тачке, праве, круга и коничних пресека.
2. Теорија детерминаната. Београд 1909 године.
3. О изразима једнограних аналитичких функција. Будимпешта 1886 године.
4. О тежинама алгебарских склопова. Глас LXI.
5. О аналитичким изразима неких функција. Глас LXI.
6. О поларно коњугованим трансформацијама. Глас LXIII.
7. О Ајлеровим и Бернулијевим бројевима. Глас LXIII.
8. О особинама једне специјалне детерминанте. Глас LXIII.

8bis О једној важној особини детерминаната, Глас, LXIII.

9. О једној особини просторних детерминаната. Глас LXV.
10. О аналитичком претстављању једнограних функција у области тачке у бесконачости. Глас LXV.
11. О неким тригонометријским идентичностима. Глас LXVII.
12. Један нов прилог теорији бројева. Глас LXIX.
13. О системама фокалних кругова. Глас LXXIII.
14. О једној симетричној функцији нула полинома трећег степена. Глас LXXIII.
15. Један прилог теорији аналитичких функција. Београд 1922. Објављен у Споменици Београдског Универзитета.
16. Проблем простора, хиперпростора и континуума. Глас LXXIX.
17. О остацима једнограмих функција. Рад Југославенске академије знаности и умјетности. Књ. 139.
18. О редовима једнограних функција. Рад, књ. 143.
19. О пфафијанима. Рад, књ. 143.
20. О вредностима неких одређених интеграла. Рад, књ. 147.
21. Сарус-ово правило у теорији просторних детерминаната. Рад, књ. 147.
22. О прецртима спрегнутих тачака једног специјалног трансфинитног скупа пројективних низова тачака. Рад примљен за Глас I разреда С. А. Н.
23. О еволуцији више наставе у Србији. Рад објављен у Споменици о оотварању Универзитета. Београд, 1905 године.

Јавна предавања, свечани говори и чланци:

1. О просвећеном идеализму и његобању његову вишом наставом. Говор о св. Сави у Великој Школи 1901, штампан у Београду у Држ. штампарији.
2. Цивилизација и наука. Ректорски говор у Универзитету о св. Сави 1911 године. Београд, Штампарија Давидовић. Прештампан из Српског књижевног гласника.
3. Социјални задатак Универзитета. Ректорски говор о св. Сави 1912 године у Универзитету. Београд, штампарија »Давидовић«. Прештампан из Српског књижевног гласника.
4. О живим силама народног јединства. Ректорски говор о св. Сави 1922 године у Универзитету. Београд, штампарија »Давидовић«. Прештампан из Српског књижевног гласника.
5. Култура и хармонија. Ректорски говор о св. Сави 1924 у Универзитету. Београд, штампарија »Народна Самоуправа« 1926 године. Публикација ректората XIII.
6. Говор о Гетеу. Одржан 20 III 1932 поводом прославе 100-годишњице од смрти његове. Објављен у нашим дневницима.
7. Говор одржан при отварању Народног Универзитета у Панчеву.
8. Говор при освећењу Вукове куће у Тршићу 17 IX 1933 године. Годишњак XLII за годину 1933.
9. Ректорски говор одржан о прослави 50-годишњице рада проф. Симе Лозанића 1922 године.
10. О рационализму XVIII века и утицају његову на друштво тога времена. Говор одржан о прослави смрти Саве Вуковића, оснивача гимназије у Новом Саду. Говор је објављен у издањима Удружења бивших ученика Српске гимназије у Новом Саду 1937 године.
11. Говор на француском језику одржан о прослави 75-годишњице националног универзитета у Атини. Објављен у Атини у Споменици о тој прослави 1912 године.
12. Говор на прослави 80-годишњице Николе Тесле у Београду 28 V 1936 године. Објављен у Споменици под насловом »Никола Тесла« 1936 године на српском и француском језику.
13. О Димитрију Нешићу. Помен у славу његову. Годишњак XVIII.
14. О живој и мртвој материји и о сукобу између виталиста и механиста. Говор приликом проглашења Ивана Ђаје за правог члана Академије. Годишњак XLI.
15. О нашој уметности средњега века. Говор поводом проглашења Влад. Р. Петковића. Годишњак XLI.
16. О нашој историографији. Говор поводом проглашења Станоја Станојевића за правог члана Академије. Годишњак XLII.
17. Пол Пенлеве. Годишњак XLII.
18. О Чеди Мијатовићу. Помен о смрти његовој. Годишњак XLI.
19. О историји као науци и смислу њезином. Годишњак XLIII.
20. О Михаилу Пупину — научнику и филозофу. Годишњак XLIV.
21. О прослави 50-годишњице Академијине. Годишњак XLVI.
22. О Јовану Жујовићу. Помен о његовој смрти. Годишњак XLVI.

Р. К.

DR. MARIJE KISELJAK

(1883.—1947.)

Dr. Marije Kiseljak

Prije 38 godina u trećem razredu tadanje realne gimnazije u Zagrebu vladalo je jednog dana veliko uzbuđenje. Saznali smo, da ćemo dobiti novoga profesora matematike. I stvarno je ušao u razred novi nastavnik, predstavivši nam se kao profesor matematike i ujedno razrednik. Bio je to Marije Kiseljak. Ostao je naš profesor i razrednik s kratkim prekidom sve do mature. Bio je vrlo strog, ali nas je time primorao da radimo. Ako su mnogi od njegovih bivših đaka suvereno vladali srednjoškolskom matematikom i dobili zaista dobru podlogu za daljnji studij naročito na tehnici, onda to imaju da zahvale upravo njemu i njegovom načinu rada. Međutim Kiseljak se nije morao služiti strogošću, da nas nauči matematiku, on je imao sebi svojstven način, da nas oduševi i da nam kroz 5 godina zajedničkog rada na srednjoj školi učini pristupačnom nauku, koju je tumačio, pokazujući nam sve ljepote, koje se kriju u znanosti, toliko egzaktnoj i savršenoj.

Bio sam povezan s profesorom Kiseljakom od tako reći prvih srednjoškolskih klupa, kroz studij na sveučilištu i kasnije kao njegov asistent i dugogodišnji saradnik, kao drug i prijatelj. Ta činjenica mi daje pravo, da napišem ovih par redaka u spomen čovjeka, koji je volio nauku i živio za nju.

Marije Kiseljak rodio se 21. listopada 1883. na Rijeci. Otac mu je bio poznati riječki liječnik. Možda je bio utjecaj očev, a možda hereditarno i djeda, koji je bio prirodoslovac, da se u Kiseljaka već u najmlađim danima javila velika ljubav za Prirodu, prirodne nauke i matematiku, koja ga nije ostavljala do posljednjih dana. U njemu se međutim naročito ispoljio dar za matematiku i on se već kao srednjoškolac bavi matematskim problemima, koji u njemu izazivaju želju za studij matematike.

On se doduše 1901. upisao najprije na Tehničku visoku školu u Beču, gdje je bio međutim samo jedan semestar, jer već u ljetnom semestru 1902. upisuje se na filozofski fakultet u Beču, gdje sluša Mertensa, Eschericha i Wirtingera. Školske godine 1903./4. upisan je na sveučilištu u Münchenu, gdje sluša Lindemanna i Bauera, te Röntgena iz eksperimentalne fizike. 1904./5. opet studira u Beču, gdje sluša među inima i Boltzmanna. Promovirao je u Beču 20. XII. 1905. Po svršenom studiju bio je kratko vrijeme srednjoškolski nastavnik na Sušaku i to od 1. IX. 1906. pošto je prije toga još položio ispit za srednjoškolskog nastavnika. Početkom godine 1910. postaje profesorom prve realne gimnazije u Zagrebu. Godine 1914., pošto je prethodno boravio godinu dana u Göttingenu, habilitirao se na filozofskom fakultetu zagrebačkog sveučilišta, kao privatni docent za algebru i teoriju brojeva. Kratko vrijeme poslije

toga postaje sveučilišni učitelj. U svojstvu privatnog docenta i sveučilišnog učitelja on je držao ova predavanja: Teorija brojeva, Dijeljenje kružnice, Teorija algebarskog brojnog tijela, Aritmetička teorija forma, Algebarska analiza, Determinante, Algebarske jednadžbe, Beskonačni redovi, Aditivna teorija brojeva, Verižni razlomci, Rješavanje numeričkih jednadžbi, Transcendentni brojevi, Osnovi aritmetike, Račun vjerojatnosti. Sva ova citirana predavanja držao je Kiseljak u razdoblju od 5 godina t. j. od školske godine 1914/5 do 1918/9 pa se odatle vidi, koliko je intenzivan i obilan bio rad Kiseljakov na filozofskom fakultetu. Kiseljak je imao želju da postane profesor na tom fakultetu, međutim tada nije bilo moguće, da se stvori katedra za algebru i teoriju brojeva, za koju se on smatrao zvanim. Godine 1916. postaje honorarnim docentom matematike na tadanjoj Šumarskoj akademiji, da godine 1919. u mjesecu svibnju bude imenovan profesorom Šumarske akademije iz matematike i deskriptivne geometrije. Sve do tada, a od časa kada je postao sveučilišni učitelj, Kiseljak je ujedno radio kao referent na tadanjem odjelu za bogoštovlje i nastavu. Zanimljivo je, da je Kiseljak morao preuzeti predavanja iz deskriptivne geometrije, za koju bi se teško moglo reći, da je bila njegova struka, samo da dobije dovoljno sati, koliko se tražilo od profesora Šumarske akademije.

13. rujna 1919. Kiseljak je imenovan redovnim profesorom Tehničke visoke škole u Zagrebu, koja je bila tada osnovana. Time je konačno postigao ono za čim je težio, postao je visokoškolski profesor. I ako je imao zapravo druge ambicije, ipak je s veseljem prihvatio to imenovanje. Tim časom počinju godine njegove najjače aktivnosti, on postaje odmah organizator i inicijator škole i nagli uspon tog našeg visokog naučnog zavoda ima da zahvali mnogo njegovoj požrtvovnosti i zalaganju. Do najvećega značenja došla je njegova agilnost u školskoj godini 1920/1., kada je bio rektor Tehničke visoke škole. Na njegovu inicijativu osnovan je i Zavod za primijenjenu matematiku sa svrhom, da se uspostavi toliko potrebna veza između tehnike i matematike.

Njegova predavanja na Tehničkoj visokoj školi bila su sjajno spremljena i odlikovala su se savršenim sistemom. Držana strogo naučno, opet su bila takova, da su i najteži pojmovi postali pristupačni i shvatljivi. Kiseljak je kao odličan predavač, povezavši na sjajan način teoriju i praksu, znao da probudi i zadrži kod svojih slušača interes za nauku.

11. lipnja 1925. napušta Kiseljak tehniku i prelazi za profesora geometrije na filozofski fakultet. Katedra geometrije bila je naime ispražnjena smrću profesora Majcena 1924. Prvo predavanje, koje je Kiseljak držao u svojstvu profesora geometrije bila je Diferencijalna geometrija. Svojim prijelazom na filozofski fakultet učinio je Kiseljak fatalnu pogrešku, zbog koje je 7 mjeseci kasnije završio svoju akademsku karijeru. To što je Kiseljak tada učinio bilo bi neshvatljivo i neoprostivo, kada ne bismo Kiseljaka poznavali kao čovjeka neobične dinamičnosti, koji se nije htio zadovoljiti time; da ostane profesor na tehnici i da iz godine u godinu predaje isto; njegov vječno živi i nemirni duh i agilnost tjerali su ga dalje. On je htio da bude nastavnik na filozofskom fakultetu i da se tako iživi unutar čitavog područja matematike. Kada nije mogao polučiti, da postane profesor algebre ili više analize, on je prihvatio da bude profesor geometrije. Mislim, da nemam krivo, ako tvrdim, da ga je kod toga vodila skrovita misao, da katedru za geometriju drži tako dugo, dok se ne stvori ili isprazni na filozofskom fakultetu katedra matematike. Druga fatalna pogreška, koju je kod toga učinio, bila je, da se je dao na to mjesto imenovati (bili su po srijedi i politički momenti) bez saglasnosti fakultetskog vijeća odnosno sveučilišnog senata. Zbog toga je 7 mjeseci kasnije bio umirovljen. Time se naglo prekida karijera i rad jednog čovjeka u naponu njegove, gotovo bih rekao, mladenačke snage. Kiseljaku je tada bilo 42 godine.

I ako je Kiseljak bio sam mnogo kriv za nesreću, što ga je zadesila, ipak se tada nije smjelo dopustiti, da sa sveučilišta bude uklonjen čovjek toliko vrijedan i toliko rijetkih sposobnosti. Sveučilište u Zagrebu odreklo se tada saradnje odličnog naučnog radnika u vrijeme, kada nismo — još manje nego danas — obilovali ni matematičarima ni matematičkim podmlatkom. Tada se sveučilište odreklo čovjeka, koji je bio svestran i koji je jednakim shvaćanjem, jednakim razumijevanjem i jednakim dubokim poznavanjem struke bio u stanju da predaje ne samo teoriju brojeva i algebru, već i višu analizu, diferencijalnu geometriju i ako je potrebno i kartografiju. Nažalost posve nenaučni razlozi onemogućili su, da se popravi učinjeno zlo. Nije li čudno, ako 30. lipnja 1925., kada je Kiseljak bio imenovan profesorom filozofskog fakulteta, rektor Tehničke visoke škole u Zagrebu piše ovo pismo:

»Profesorsko vijeće vrlo i iskreno žali Vaš odlazak, jer Tehnička visoka škola gubi odlična i savjesna nastavnika, profesorsko vijeće marnog svog člana, koji je imao vodeću riječ u njemu, gg. profesori svog vrlog kolegu, a osobito žali iz razloga, što Vašim odlaskom nastaje na tehnici jedna praznina, koju nije lako ispuniti.

Vaše vrlo vrijedno ime bit će zlatnim slovima ubilježeno u analima zagrebačke tehničke visoke škole, a sadanje profesorsko vijeće kao Vaš savremenik i svjedok Vašeg požrtvovnog rada izriče Vam za sve srdačnu i toplu hvalu, te sa odobravanjem prihvaća Vašu potporu, koju mu izvoljeste obećati, dok Vam se nađe nasljednik i rado će računati i zamoliti Vas za Vaš vrijedni glas za interese naše tehnike, ako se jednoć nađemo pod istim rektorom.

U Vašem novom položaju i zavodu profesorsko vijeće — ponosno opet što je taj poziv i čast zapala baš njegovog člana — želi Vam puno zadovoljstva, te da bi dugo i uspješno djelovali u korist nauke naših mlađih, a po tome na korist naroda i lijepe nam domovine.«

I ako je Kiseljak čitavo vrijeme otkada je postao profesor na filozofskom fakultetu i dalje predavao na tehnici, on se, nakon što je bio umirovljen, nije mogao vratiti na tehniku, usprkos lijepih fraza u gore citiranom pismu.

U častan spomen Kiseljaku, treba međutim ustanoviti, da je on teški udarac sudbine* upravo herojski snosio i ostao je do posljednjeg časa naučni radnik-matematičar. On je to pače ostao, dok je radio na geodetskim radovima, kojima se posvetio nakon svog odlaska sa sveučilišta, on je to ostao i u posljednjim danima života, kada je u tišini svoje radne sobe prevodio jedan udžbenik više matematike i kada se sav posvetio svom posljednjem djelu: teoriji skupova.

Koliko se Kiseljak u svakoj prilici znao snaći, dokazuje sjajno upravo njegov rad u geodetskoj struci. Tako je primjerice bio naročito zapažen njegov rad na području komasacija, gdje je njegova djelatnost bila korisna ne samo s praktičnog gledišta, već i s teoretskog, jer je svojom naučnom erudicijom, poznavajući vrlo dobro trigonometriju i geodeziju, unosio tekovine nauke u provađanju praktičnih primjena triangulacije. Mnogi veliki poslovi ne bi se mogli izvesti bez prethodne triangulacije, koja se provodila po uputama Kiseljakovim. Praktičari geodeti stekli su u radu s njim duboku spoznaju prevlasti teorije nad

---

* U ono vrijeme, da nesreća bude veća, izgubio je vlastitom krivnjom i svu svoju imovinu.

praksom. Mnogi su po njegovim uputama osvježili svoje znanje iz geodezije i njegovom pomoći postali u svom radu samostalniji i sigurniji, nego bi to možda bili bez njegova sigurnog vodstva.**

Kiseljak je čitavog svog života imao veliku ljubav, a to je bila ljubav za sveučilište i nauku i njegove želje i čežnje nakon njegovog tragičnog sloma bile su usmjerene samo jednom cilju, da se ponovno vrati na katedru. On je doduše držao od 1932.—1940. kao honorarni profesor predavanja iz agrarnih operacija na Tehničkom fakultetu, ali to je bilo samo kao sporedno zanimanje i nije bilo ono, za čim je Kiseljak težio. Poslije oslobođenja izgledalo je, da će mu biti ispunjeno da se vrati sasvim sveučilištu, međutim bolest, koja je polako rastočila njegov organizam, više mu nije dala mogućnost, da mu se ostvari ta njegova vruća želja. Umro je ojađen i razočaran u svojim najvećim idealima.

Marije Kiseljak bio je matematičar par excellence, on to nije bio samo po izvanjskoj kvalifikaciji, već i po onom unutrašnjem shvaćanju te nauke i po ljubavi, koju je imao za nju i koju je znao upravo sugestivnom moći prenositi na svoje đake. To mu je bilo to lakše, što je u toj struci stekao ogromno znanje, tako da smo kod svake njegove riječi osjećali stručnjaka, koji suvereno vlada matematikom. On je svoj poziv sveučilišnog nastavnika shvatio vrlo ozbiljno, on je znao što taj poziv znači i bio je u punom smislu riječi naučni radnik. O tome svjedoče brojni radovi publicirani u Radu Jugoslavenske akademije, kojoj je bio dopisni član, u Nastavnom vjesniku, Glasniku prirodoslovnog društva i u mnogim znanstvenim časopisima inozemstva. Shvaćajući visoko svoje obaveze i dužnosti prema narodu i studentima, on je već 1920. počeo izdavanjem Udžbenika više matematike, koji nažalost nije mogao do kraja izdati zbog tadanjih naših nesretnih prilika i neshvaćanja tadanje naše sredine za kulturne potrebe.

Da se vidi, koliko je bio obilat rad Kiseljakov, navest ću ovdje njegove glavne radove:

1. Eine neue Auflösungsmethode der homogenen quadratischen Gleichungen zwischen zwei Unbekannten. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 1903.

2. Grundlagen einer Zahlentheorie eines speziellen Systems von komplexen Grössen mit drei Einheiten. 1905. (Disertacija).

3. Ueber einen geometrischen Satz von Dirichlet. Archiv der Mathematik und Physik. 1907.

4. Prilozi za teoriju savršenih brojeva. Izvještaj realne gimnazije. 1911.

5. Novija istraživanja o prim-brojevima. Nastavni vjesnik 1914. (Habilitaciono predavanje).

6. O Euklidovu algoritmu. Rad Jugoslavenske akademije. 1915.

7. Ueber Anzahlen und Summen von Teilern. Monatshefte für Mathematik und Physik. 1917.

8. Aritmetičko-algebarski problemi iz teorije izbrojivih vjerojatnosti. Rad Jugoslavenske akademije, 1918.

9. Einige Bemerkungen über Pythagoräische Dreiecke. Glasnik prirodoslovnog društva. 1918.

10. O Pitagorinim trokutima. Rad Jugoslavenske akademije. 1919.

11. Neke metričke relacije kod krivulja u ravnini. Rad Jugoslavenske akademije. 1919.

** Podatke o Kiseljakovim zaslugama u geodetskoj struci zahvaljujem prof. dru Nenadiću.

Koliko je taj rad obilan može se vidjeti i po tome, da je većina tih radova napisana u godinama 1915.—1919. t. j. kada je Kiseljak bio još zauzet sastavljanjem svojih prvih predavanja na sveučilištu, a istodobno je bio činovnik u Odjelu za bogoštovlje i nastavu. Nije međutim isključeno, da su ga upravo ta predavanja — što se vrlo često događa — inspirirala za te radove. U tom slučaju je pogotovo šteta, da mu nije bila dana mogućnost, da ostane nastavnik na matematskom odjelu tadanjeg filozofskog fakulteta. Svakako ti radovi svjedoče ne samo koliko je Kiseljak intenzivno radio, već i o njegovoj vanrednoj brzini shvaćanja.

Odmah nakon što je bio postavljen za profesora Tehničke visoke škole, on se počeo baviti sastavljanjem Udžbenika više matematike. To djelo, kao što sam gore spomenuo, nije do kraja izašlo, ali iz prvog sveska, koji je otštampan, vidi se, da bi to bila knjiga znatne vrijednosti.

Kiseljakovi radovi pokazuju, da je glavna domena njegovog stvaranja bila algebra i teorija brojeva i vjerujem, da bi on na tom području dao još znatnih rezultata, da nije prije vremena bio prekinut u svom naučnom djelovanju. I ako se međutim kroz gotovo dva decenija poslije svog odlaska sa sveučilišta posvetio geodeziji, on nije prestao biti matematičar. I kada zbog bolesti više ne može ići na teren, on se opet vraća svom radnom stolu i nauci. Njegov prijevod Baule-ove Matematike prirodoslovaca i inženjera, lijep je prinos naučnom izgrađivanju kadrova. I kod ove knjige Kiseljak nije imao sreće, jer je doživio samo izdanje prve od sedam knjiga ovoga djela.

U posljednjim godinama svog života, Kiseljak, ne izgubivši kroz sve te duge godine, ništa od svog vitaliteta, sjeda uz svoj pisaći stol i piše svoje posljednje djelo: N a u k o s k u p o v i m a. Na tome je Kiseljak radio posljednjih godina i dovršio je rukopis tik pred smrt. Do zadnjeg časa vršio je još sitne korekture i umro barem u tom pogledu zadovoljan, da mu je to uspjelo završiti. Rukopis obasiže 1160 tipkanih stranica, pa je u njemu sadržana teorija skupova, dokumentovana obilnom literaturom. Nažalost nije Kiseljak ni kod ovog djela mogao dočekati da bude otštampano.

Kiseljak je bio odličan matematičar, ali nije zbog toga bio suhoparan, on je uvijek ostao povezan sa stvarnošću, volio je život i bio čovjek duboke kulture i svestranog znanja. Svaki razgovor s njim bio je događaj za sebe, toliko duha i zdravog humora emaniralo je iz njega. Bio je odan prijatelj i drug bilo kao neumorni planinar u visokim gorama, bilo u društvenoj sredini, kraj toga bio je veliki rodoljub i u svom stavu prema nauci, životu i društvu uvijek među najnaprednijima.

25. prosinca 1947. posjetio je Kiseljaka intimni krug njegovih prijatelja i to je bio naš posljednji sastanak i razgovor s njim. Iste noći je umro, srčana kap skratila mu je daljnje muke.

Kiseljak je otišao, ali on nije živio uzalud, ostalo je njegovo djelo, ostali su njegovi učenici, prijatelji i saradnici u čijim će se srcima zadržati trajni spomen na njega. On je bio moj prvi učitelj matematike, vodio me je i pokazivao mi je put u prvim još nesigurnim koracima kroz tu nauku. Ako sam baveći se matematikom mogao doživjeti one duševne emocije, koje samo matematika može da pruži, onda to dugujem u prvom redu Kiseljaku, jer sam se po njegovu savjetu posvetio studiju te znanosti. Ovih par redaka neka bude s toga znak zahvalnosti nezaboravnom učitelju i prijatelju.

Vladimir Vranić

NEKOLIKO RIJEČI POVODOM SMRTI MAXA PLANCKA*
(1858—1947)

Dne 4. X. 1947. umro je veliki fizičar Max Planck u 90. godini života**. U želji da se odužimo uspomeni toga velikog fizičara, osvrnut ćemo se na ovom mjestu s nekoliko riječi na odlučujuću ulogu, koju je Planck imao na razvoj fizike 20. stoljeća.

Godine 1900. Max Planck postavio je hipotezu kvanata. Daljnje razvijanje te hipoteze postalo je temeljem moderne nauke. Hipotezu o kvantima postavio je Planck u vezi sa svojim istraživanjem radiacije crnoga tijela i za taj je rad 1918. dobio Nobelovu nagradu za fiziku. Glavno je područje Planckova djelovanja uz teoriju radiacije termodinamika, koju je svojim istraživanjem također unapredio. Osim toga je Planck obrađivao i ona pitanja iz ostalih područja fizike, koja su u vezi s naukom o toplini i kvantnom teorijom. Planck je vrlo mnogo publicirao; tako su izdana njegova predavanja iz termodinamike, iz teorije toplinskog zračenja, iz opće termokemije, njegov uvod u teoretsku fiziku i t. d. Štampani su i mnogi njegovi govori u kojima iznosi svoje poglede na razne probleme.

Predugo bi bilo da opisujemo sveukupni naučni rad Maxa Plancka, koji je izvanredno plodan, nego ćemo se ograničiti samo na kratak prikaz postanka njegova najznačajnijeg djela — postavljanja hipoteze kvanata, i ukratko ćemo prikazati najznačajnije etape, u razvoju moderne fizike, koje su nastupile nakon postavljanja te hipoteze.

Koncem prošlog stoljeća, u doba kad je Maxwellova teorija elektromagnetskih pojava slavila uspjeh za uspjehom, nastupio je za fiziku važan problem, da se uspostavi veza između Maxwellove teorije i dotada poznatih zakona iz područja nauke o toplinskom zračenju.

Prvi uspjeh na tom području postizava Boltzmann (1884. g.), koji polazeći od Maxwellove teorije i termodinamike izvodi Stefanov zakon (pronađen eksperimentalnim putem 1879. g.), da je gustoća energije radiacije proporcionalna s četvrtom potencijom apsolutne temperature.

Sada je bio postavljen problem da se nađe kako se ta ukupna energija raspoređuje na pojedine frekvencije. Taj je problem riješio Wien (1896. g.) pomoću elektrodinamike i kinetičke teorije plinova. Međutim su pokusi Lummera i Pringsheima (1897. g.) dali rezultat, da Wienov zakon zračenja nije ispravan za područje dugih valova. Prema tome, problem je i dalje čekao na svoje općenito rješenje.

Max Planck započeo je svoj naučni uspon doktorskom radnjom pod naslovom »De secunda lege fundamnetali doctrinae mechanicae caloris« (1879. g.). Ova je tema o drugom glavnom zakonu termodinamike pratila Plancka kroz cio njegov daljnji znanstveni rad. Razumijemo stoga zašto se je i Planck dao s najvećim zanimanjem na rješavanje problema radiacije, koji su u tako uskoj vezi s područjem, kojim se je on prvenstveno bavio.

Planck je izrađivao svoju teoriju procesa radiacije na osnovu klasične teorije uz pretpostavku da ima neku šuplju komoricu ugrijanu na određenu temperaturu u kojoj se nalazi velika množina oscilatora, elektrona, koji titraju pod utjecajem elastične sile. Svaki od tih oscilatora ima neku određenu vlastitu frekvenciju i zato se on nalazi u resonanciji

---

* Referat održan 26. 11. 1947. na »Večeri malih tema« Matematičko-fizičke sekcije.

** Max Planck rodio se je 1858. g. u Kielu. Godine 1885. postao je profesor teoretske fizike u svom rodnom mjestu, a 1889. g. u Berlinu.

s toplinskim zračenjem iste frekvencije, koje šalju zidovi šuplje komorice. Kod toga procesa resonancije izmjenjuje oscilator energiju s radiacijom, pa se tako formira neka ravnoteža radiacije. Ako se kod toga uzima, a to slijedi na osnovu klasične teorije, da energija oscilatora tokom vremena poprima sve moguće vrijednosti, onda Planckov izvod daje naprijed spomenutu Wienovu formulu zračenja, za koju smo već spomenuli, da nema općenitu važnost. Zato je Planck još jednom ispitao svoj izvod, pa je uveo, u svrhu da postigne slaganje s eksperimentalnim podacima, svoju glasovitu hipotezu kvanata (1900. g.).

Planck je pretpostavio da je sva raspoloživa energija razdijeljena na konačan broj kvanata energije, koji su po zakonima statistike porazdijeljeni na pojedine oscilatore. Ako se za taj kvant energije uzme da je proporcionalan s brojem titraja odnosnoga resonatora, dobiva se formula zračenja, koja nosi Planckovo ime, a u potpunom je skladu s eksperimentima. Konstantu proporcionalnosti, koja ima dimenziju djelovanja (produkt energije i vremena), nazvao je Planck kvantom djelovanja.

Planckova postavka »Nužno je energiju nekog resonatora shvatiti ne kao neprekidnu i neograničeno djeljivu veličinu, nego kao diskretnu veličinu sastavljenu iz dijelova« protuslovila je tadašnjim fizikalnim predodžbama i nitko onda nije ni slutio da će se iz toga razviti jedna teorija atomnih procesa.

Planck je cijelo svoje istraživanje izveo zanoseći se očekivanjem, da će za rješenje problema dostojati zakoni klasične elektrodinamike. Stoga je hipoteza kvanata možda baš njemu samome zadala najviše nemira i sumnji u ispravnost vlastitoga postupka. Ohrabrio ga je Boltzmann, koji je pokazao svoje veliko zanimanje i pristajanje uz Planckov način rješavanja problema.

Ipak, ni nakon objavljivanja rezultata svojih istraživanja, Planck se nije otresao sumnji, nego je nastojao dati drugu »blažu« interpretaciju hipoteze kvanata. Ta nesigurnost sasvim je razumljiva. Hipoteza kvanata došla je u doba najvećeg triumfa Maxwellove teorije, pa je jasno da ovaj osamljeni slučaj, koji je stajao u protuslovlju s Maxwellovom teorijom, nije mogao uzdrmati povjerenja što su ga fizičari imali u predodžbe klasične fizike.

Da je hipoteza kvanata nastavila svoj razvoj i pobjedonosni put, zasluga je drugih genijalnih istraživača, koji su ideju kvanata upotrijebili pri rješavanju svojih problema.

Prvi je od tih bio Albert Einstein, koji je proširenjem hipoteze kvanata na atomne procese uspio riješiti fotoefekt, nerazumljiv sa stanovišta klasične teorije (1905. g.).

Uskoro zatim (1907. g.) Einstein ponovo koristi hipotezu kvanata pri izvodu formule za specifičnu toplinu čvrstoga tijela. Dobivena formula davala je zadovoljavajuće rezultate. Još bolje su teoriju specifične topline na principijelno istim pretpostavkama izgradili kasnije neki drugi fizičari, a osobito Debye (1912.—1913. g.).

Daljnja potvrda hipoteze kvanata bili su pokusi Francka i Hertza (1913. g.) o t. zv. resonantnom potencijalu. Ti se pokusi odlikuju naročitim zorom i neposrednošću.

U ono doba bilo je i drugih radova, koji su davali uvjerljiv dokazni materijal za egzistenciju kvanata, ali ipak je hipoteza kvanata dobila svoj najjači temelj osnivanjem i izgradnjom atomne teorije Nielsa Bohra (1913. g.). Najznačajniji rezultat Bohrovoh istraživanja bio je taj, da nije kvant energije, nego kvant djelovanja, ona fundamentalna veličina,

koja dirigira svim atomnim procesima. »Bohrova je teorija«, kako je rekao Planck u svom govoru održanom prilikom svečanosti primanja Nobelove nagrade, »u kvantu djelovanja našla onaj dugo traženi ključ za ulaz u čedesnu zemlju spektroskopije.«

Sommerfeld, nadovezujući na Bohrove radove, rješava problem, po kojim pravilima treba kvantizirati neki proizvoljni mehanički sustav s više stupnjeva slobode. Rješenjem toga problema i primjenom relativistički shvaćenog pojma mase riješio je on problem t. zv. fine strukture vodikova i helijeva spektra (1916. g.). Zatim slijedi i jedan od najuvjerljivijih dokaza za ispravnost puta kojim se je krenulo, a to je Bohrovo tumačenje periodskog sustava kvantnom hipotezom. Bohru se ima zahvaliti nadalje i pronalazak principa korespondencije, koji je uz samu hipotezu kvanata bio najsnažniji način za prodiranje u nepoznata područja atomske fizike. I tako sve dalje i dalje niže se uspjeh za uspjehom, postepeno se izgrađuje kvantna teorija.

No uza sve uspjehe u to je doba kvantnoj teoriji još manjkala ona jasnoća i harmoničnost, koju ima klasična fizika. Planckova hipoteza bila je samo nit vodilja kroz labirint atomistike i serijske spektre. Do potpune izgradnje trebalo je proći još niz prividnih protuslovlja i u isto vrijeme niz velikih uspjeha. Tek intenzivnom suradnjom fizičara različitih naroda došlo se je do neprotuslovnih i harmoničnih spoznaja, koje nazivamo modernom teoretskom fizikom.

Istraživanja novog područja, koja su omogućena Bohrovim radovima, dovela su fizičare ubrzo do niza pojmovnih poteškoća. Te poteškoće su teoretičare upućivale da idu u potragu za jednom još nepoznatom kvantnom fizikom, kojoj su onda bile nejasno nazirane samo konture u principu korespondencije. Najveće poteškoće bile su u teoriji zračenja, gdje se je javio zagonetni dualizam između dviju zornih slika: Pokusi ogiba i interferencije dokazivali su s jedne strane ispravnost valne slike optičkih pojava, a foto-efekt, Comptonov efekt i neki drugi eksperimentalni rezultati, svjedočili su o ispravnosti korpuskularne slike optičkih pojava. Fizičari su bili prisiljeni povrći reviziji zorno značenje eksperimenata.

Zato je (1924. g.) de Broglie pokušao da dualizam val-korpuskula, koji se je javio kod pojava svjetlosti, prenese i na običnu materiju. Ovu ideju razradio je nekoliko mjeseci kasnije (1925. g.) Schrödinger do potpunoga matematičkog sustava kvantne teorije. On je postavio diferencijalnu jednadžbu valova materije i pokazao da je određenje stacionarnih stanja neke materije istoznačno s rješenjem vlastitih vrijednosti te diferencijalne jednadžbe. Međutim, dok je de Broglie težio da nađe valnu teoriju materije sličnog svojstva i zornosti, kao što je Maxwellova teorija zračenja, to Schrödingerovo rješenje daje jednu teoriju valova materije u višedimenzionalnom konfiguracionom prostoru. Izlaz iz poteškoća postignut je i na drugi način. Kao sigurni osnov teorije mogao se je smatrati postulat o egzistenciji kvanta djelovanja i princip korespondencije. Tendencija je daljnjih istraživanja bila, da se na osnovu kvantnih uvjeta Bohrov princip korenspondencije tako »izoštri«, da bi mogao davati i kvantitativno ispravne rezultate. Tako se je konzekventnim razvijanjem te ideje uspjela pronaći jedna matematička šema, koja se može shvatiti kao kvantitativno formuliranje principa korespondencije i time dolazimo do Heisenbergove mehanike matrice ili kvantne mehanike (1925. g.).

Uskoro su Schrödinger i Eckart dokazali i matematičku ekvivalentnost »valne mehanike« s »kvantnom mehanikom« nastalom iz principa korespondencije.

Izgrađena je valna teorija materije i u malo prije spomenutom de Broglievom smislu. No uprkos formalne ljepote ove teorije, bilo je odmah jasno, da se ona u takovom obliku ne će moći održati, jer nije sadržavala u sebi kvantno-teoretskog elementa. Tu su teoriju dalje izgradili Dirac, Pauli, Jordan, Klein i Wigner na taj način da su u nju uveli kvantno-teoretske elemente. Prema njihovim istraživanjima kvantna teorija valne slike i kvantna teorija korpuskularne slike međusobno su ekvivalentne. Time je pokazano da u formalizmu kvantne teorije korpuskularna i valna slika nastupaju samo kao forma ispoljavanja jednoga istoga fizičkog realiteta — materije, shvaćene u najopćenitijem smislu.

Iako se formalizam kvantne teorije odigrava u višedimenzionalnom konfiguracionom prostoru, ipak su se za opisivanje činjenica upotrebljavali pojmovi uzeti iz našeg zornog prostorno-vremenskoga svijeta i radi toga se je dolazilo do raznih protuslovlja. Poteškoće se mogu riješiti tako, da se dosadašnji zorni pojmovi zadrže, ali da se njihovo područje primjene koliko je nužno ograničiti. Prvi je taj problem riješio Heisenberg pronašavši t. zv. relaciju neodređenosti. Međutim, nije se radilo samo o tome da se ograniče klasični pojmovi, nego se je moralo također pokazati, da je moguća, pomoću tako preciziranih pojmova, jedna neprotuslovna interpretacija kvantno-teoretskog formalizma. To je proveo Bohr i pokazao da se svi prije toga prividno nerješivi paradoksi kvantne teorije osnivaju na tome da su se zanemarivale smetnje, koje su nužno spojene sa svakim mjerenjem. Nadalje je teoretska istraživanja doveo Dirac sa svojom relativističkom kvantnom teorijom (1928. g.).

Zajedno sa ovim teoretskim uspjesima kvantne teorije slijedio je niz primjena. Tu bi i najpovršniji pregled primjena bio preopširan, pa ćemo se na iste osvrnuti tek sa nekoliko riječi.

Najprije se je podvrglo ponovnom izvodu svih dosadašnjih rezultata dobivenih na osnovu starih shvaćanja. Rezultati dobiveni na taj način dali su izvanredno dobra slaganja sa iskustvom. Nova shvaćanja mogla su se uspješno primijeniti i u osnovnim problemima kemije. Dana je nadalje kvantitativna teorija Franck-Hertzovih eksperimenata. Razvija se najnovija teorija metala. Protumačen je Ramanov efekt. Konačno ovdje moramo istaknuti probleme, koji su danas u središtu istraživanja, a to su problemi kosmičkih zraka i problemi atomskih jezgri i t. d.

Ovaj letimičan prikaz zokazuje nam do koliko je izvanrednih i neočekivanih posljedica, za kratko vrijeme jednoga ljudskog vijeka, dovelo Planckovo otkriće elementarnog kvanta djelovanja. Ne samo da ovo otkriće tvori osnov za tumačenje atomnih procesa, nego je ono istovremeno dovelo do potpune preinake naših osnovnih predodžbi o strukturi materije. Nikada prije nije neko otkriće prouzrokovalo tako buran razvoj na cijelom području prirodnih nauka kao Planckovo otkriće kvanata.

Planck je imao sreću da doživi najveće zadovoljstvo koje uopće može zadesiti naučenjaka, a to je da je bio svjedokom toga burnoga razvoja, koje je započelo s njegovim radovima o radijaciji šupljega prostora, a okrunjeno je formiranjem jedne simbolične kvantne mehanike, koja se može shvatiti kao neprisiljeno poopćenje klasične mehanike, a može se s njom usporediti i s obzirom na ljepotu i unutarnju skladnost.

Dragutin Mayer

Dodatak profesora Pejnovića o Plancku

Prof. Planck nije htio pristupiti u nacistički pokret, koji se nazvao: njemačka fizika (Deutsche Physik). U vrijeme progona prof. Einsteina izražavao se Planck o njemu s najvećim priznanjem. U posljednjem stadiju rata streljan je talentirani Planckov sin. Nobelova nagrada iz fizike za god. 1918. podijeljena je Plancku. (U engleskom časopisu Nature, No. 4079 od 3. I. 1948. stoji neispravan podatak: god. 1920. mjesto 1918.). U jeseni g. 1942. boravio je Planck u Zagrebu, te je 15. IX. održao predavanje: Smisao i granice egzaktnih prirodnih nauka (v. »Priroda«, g. 1942, str. 184).

80-GODIŠNJICA MOSKOVSKOG MATEMATIČKOG DRUŠTVA I 80-GODIŠNJICA MATEMATIČKOG ZBORNIKA

Širom cijeloga svijeta postoje danas mnoga matematička društva, među kojima je Moskovsko matematičko društvo ne samo najstarije matematičko društvo u SSSR-u, nego i jedno od najstarijih poznatih svjetskih matematičkih društava uopće. Među poznatim najstarijim matem. društvima »Moskovsko mat. društvo« je treće po redu, pa su i najpoznatija, kao što je francusko, njemačko, američko matem. društvo, mnogo mlađi od moskovskog.

Matematička društva, s pravom se može kazati, predstavljaju glavnu os modernog matematičkog života. U današnjem tempu naučnog stvaranja, kada je produktivnost i na matematičkom polju pojačana, osjeća se potreba, da se i matematičari sastaju, da jedan drugome saopće plodove svojih istraživanja i svoga iskustva, da međusobno raspravljaju, kritiziraju i da se sporazumijevaju.

Nema danas skoro nijedne zemlje, u kojoj ne bi postojalo barem jedno matematičko društvo. Ima zemalja u kojima ih je i više.

I ako je broj svih matematičkih društava vrlo veliki, ipak je između njih vrlo malo takovih, koja su osnovana prije 100 godina. Njih je, da točnije kažemo, samo dva. Kao dva najstarija matematička društva u Evropi spominju se Hamburško i Amsterdamsko matematičko društvo. Prvo je osnovano 1690. godine i postoji prema tome već preko 250 godina, dok je drugo nešto mlađe i postoji oko 170 godina (osnovano je 1782). Ostala su društva mnogo mlađa i organizirana su u glavnom u drugoj polovini devetnaestog stoljeća.

Prvo po redu poslije ova dva dolazi odmah »Moskovsko matematičko društvo«, o kome će se ovdje i govoriti prilikom 80-godišnjice njegova osnutka, (godine 1867.). Tako se 9. II. 1947. napunilo 80 godina od osnutka Moskovskog matem. društva.

No prije nego što pređemo na sam historijat Moskovskog društva, baš u cilju upoređenja, da spomenemo u tom nizu osnivanja po redu i druga neka od najstarijih društava. Čehoslovačko društvo za matematiku i fiziku organizirano je 1869. i jedno je od najbrojnijih društava sa blizu 2000 članova. Godinu dana kasnije osnovano je Londonsko matem. društvo, a 1872. proradilo je Francusko matem. društvo, a 1879. Harkovsko. Ovoj grupi prvih matem. društava pridolaze 1884. god. tri nova: u Edinburgu, Palermu i Japanu. Kao jedanaesto po redu da još spomenemo Američko matem. društvo osnovano 1888., koje navodimo baš stoga, što je njegovim članom već od samog početka, od 1889. godine bio i naš zemljak Mihailo Pupin, profesor matematičke fizike na sveučilištu u Columbiji, za koga R. C. Archibald kaže »troughout life one of the Society's finest friends«[1]

A sada da vidimo, kako je došlo do osnivanja Moskovskog matem. društva, kako je ono radilo, kako se razvijalo, kakvim je životom živjelo.

Za razvoj nauke u predrevolucionarnoj Rusiji karakteristične su baš šezdesete godine prošlog stoljeća. To su godine procvata nauka u Rusiji, kada naučnom djelovanju udaraju temelje veliki učenjaci među kojima se nalaze svjetla i poznata imena kao što su: Mendeljev, Čebišev, Sečenov i drugi.

---

[1] Raymond Clare Archibald, History of the American Mathematical Society (1888—1938). (Bulletin of the Amer. math. Society. Januar 1939, str. 31—36).

U doba kada je u prvoj polovini XIX. stoljeća u Kazanju Lobačevski stvarao geometrijsku teoriju, koja će svojim idejama dati poticaja za istraživanja osnova geometrije, na sjeveru u Peterburgu se osniva velika naučna škola, pod nazivom »Peterburška škola«, koja je igrala znatnu ulogu u razvoju matematike. Tri najveća područja matematike: teorija brojeva, matematička fizika i teorija vjerojatnosti, postala su predmetom istraživanja talentiranih i poznatih matematičara, osnivača te škole. Za nešto više od jednog stoljeća svoga postojanja, ona je stekla izvjesnu svjetlu tradiciju, koja se očitovala u tome, da se u toj školi problematika matematike dovodila u vezu s principijelnim pitanjima prirodnih nauka. U tradiciju te škole spada i majstorsko rješavanje teških konkretnih zadaća, virtuoznost u analitičkim postupcima, dovođenje rezultata do broja, a tim samim do mogućnosti praktične primjene i eksperimentalnog provjeravanja razrađenih teorija. Uz tu školu vezana su imena kao što su: Bunjakovski, Ostrogradski, Čebišev, Markov, Ljapunov. Sve glasovita imena velikih matematičara.

Dok se u Peterburgu u drugoj četvrtini XIX. stoljeća rasplamtio ozbiljan matematički rad, dok su se tu stvarale naučne tradicije i dok se formirala poznata škola učenjaka, u Moskvi se još živjelo po starom. Nije se ni pomišljalo na naučni rad. Čak se ni predavanja na fakultetu nisu nalazila na nivou nauke tog vremena.

Ipak je polovinom XIX. stoljeća opći kulturni i društveni polet uvjetovao i razvoj fizike i matematike u Moskvi. Pravim središtem tih godina u razvoju baš matematičko-fizičkih nauka postaje Moskovsko sveučilište, koje je u svoj kolegij skupilo poznate učenjake, koji su zaslužni za snažni progres ovih nauka. Sveučilišnim opservatorijem tih godina upravlja najveći ruski astronom Bredihin. Osniva se prvi fizikalni kabinet koji dobija naučnu podlogu pod vodstvom Stoljetova. Žukovski svojim radovima u mehanici daje znatne priloge nauci. Taj snažni naučni polet na sveučilištu dobija svoj izražaj i na području matematike u užem smislu.

Izvjesno oživljavanje matematičkog djelovanja ili da točnije kažemo, polet u predavanjima matematike u Moskvi je vezan uz ime Nikole Dmitrijevića Brašmana, koji je od 1834. g. živio u Moskvi. Imao je znatnih zasluga za univerzitet zbog podizanja nivoa predavanja matematike na sveučilištu, a isto tako i u organizaciji naučnog života u Moskvi. Bio je lično poznat s najvećim učenjacima svoga vremena: Hamiltonom, Jacobijem i dr. i on je tako reći presadio u Moskvi svježe naučne ideje. S interesom je pratio uspjehe nauke i nalazio se u toku njenih zbivanja. Zbog toga su i njegova predavanja iz matematike bila na razini najboljih zapadno-evropskih kurseva. Iako nije bio originalan, on je znao naći među svojim učenicima nadarene i sposobne ljude i uvesti ih u naučne metode. Učenici su jako cijenili svoga učitelja. Tako je Čebišev kroz cijeli svoj život sačuvao duboko poštovanje prema svome učitelju i do konca njegova života bio je s njim u prepisci. Rad je bio toliko intenzivan, da se nije ograničavao samo na sveučilište, nego se osniva i samostalan matematički kolektiv, koji će u obliku »Matem. moskov. društva« pružati još više poticaja za samostalan naučni rad na području matematike. Bilo je to ovako: Kada je Brašman 1864. godine otišao u penziju, nije ipak htio prekinuti posve vezu sa sveučilištem. Tako je on osnovao fond iz vlastitih sredstava za nagrađivanje najbolje radnje iz matematike. Kod njega se u stanu sastaju bivši učenici, da bi izmjenjivali svoje misli. Od naročitog su značaja bili pri tome referati o novostima, koje su izlazile u stranim časopisima. Na jednom takvom sastanku (15. septembra 1864.) je čak donijeta odluka, da se ovaj privatni kružok matematičara, koji su se sastajali kod Brašmana, pretvori u naučno društvo, koje će

redovito raditi. I tako je na inicijativu profesora moskovskog sveučilišta N. D. Brašmana i A. J. Davidova formiran 1864. »kružok ljubitelja matematike«. Djelovanje se kružoka brzo razvijalo i iz njega se 9. II. 1867. stvara »Moskovsko matematičko društvo«.

U sastav članova utemeljača društva ušli su pored njegovog prvog predsjednika A. J. Davidova, jer je Brašman već bio umro, ugledni učenjaci, kao što su već spomenuti astronom F. A. Bredihin, zatim K. M. Peterson, F. A. Sludski, P. L. Čebišev, Bugajev, koji su bili najaktivniji članovi društva u prvim decenijima njegovog postojanja. Nije slučajno da ti učenjaci nisu bili samo matematičari, nego i ugledni predstavnici matematičkog izučavanja prirode. Tako se na pr. sveobuhvatni matematički genij Čebiševa ne bavi samo najtežim pitanjima čiste matematike (naročito teorije brojeva, analize i teorije vjerojatnosti) nego i dijelovima primjenjene matematike, koji su u vezi s tehnikom njegova vremena.

Grupi članova utemeljača Moskovskog matem. društva uskoro se pridružio novi član, učenjak najvećeg kalibra N. E. Žukovski, koji je pristupio društvu saopćavajući »Dvije primjedbe o hidrodinamici« na zasjedanju 20. oktobra 1873. U upravu društva izabran je 20. marta 1875. Ako se može govoriti o jednoj centralnoj figuri u životu društva za prve polovine stoljeća njegova opstanka, to je takova nesumnjivo N. E. Žukovski, koji je bio njegov najaktivniji član, počinjući od 70-tih godina prošloga vijeka sve do svoje smrti god. 1921. Teško je otvoriti knjigu zapisnika društva za pola vijeka, 1870.—1920., a da se ne zadrži pažnja na referatima N. E. Žukovskog, koji su posvećeni najrazličitijim pitanjima mehanike, a često i čiste matematike. Referat »Rasprostiranje valova s brzinom većom od brzine zvuka« pročitan je 3. novembra 1919. To je bio uopće posljednji, što ga je Žukovski pročitao u Moskovskom matem. društvu.

Karakteristična crta u smjeru djelovanja Društva u cijelom prvom periodu njegovog postojanja ispoljavala se u tome, što je ono obuhvaćalo matematičko istraživanje prirode, jedva se i dotičući čisto matematičkih pitanja. Taj su smjer zastupali prvoklasni učenjaci kao što je baš Žukovski, zatim Bredihin i Sludski, a za kojima već 90-tih godina slijedi Čapligin. Sludski je bio predstavnik mehanike i matematičkih prirodnih nauka u Moskvi u to doba. S njim počinje plejada znamenitih moskovskih učenjaka na polju mehanike (Žukovski, Čapligin). Njegove rasprave posvećene su različitim pitanjima mehanike, fizike, geodezije, a neka i pitanjima čisto matematičkog sadržaja.

Od predstavnika čiste matematike, čije je djelovanje u toj epohi u osnovi bilo vezano s Moskov. matem. društvom, na prvom mjestu treba spomenuti osnivača moskovske škole diferencijalne geometrije K. M. Petersona — litvanskog matematičara —, koji je uglavnom radio u Moskvi. Interesatno je spomenuti, da Peterson nije nikada bio predavač na višim školama, nego je bio gimnazijski nastavnik, tako da je Društvo za njega u najvišem stupnju, više nego li za bilo koga drugoga od moskovskih matematičara, bilo središtem naučnog života i naučnog interesa. Iako mu za života radnje iz dif. geometrije ostaju nezapažene, kasnije će one ipak poslužiti kao polazna točka za radove niza moskovskih geometara. Smjer, koga je učinio, produžava početkom 80. godina Mlodzejevski, a početkom 90. godina Jegorov i dr.

Pored uzajamnog djelovanja u interesu matematičkih nauka novo stvoreno društvo je razvilo i široko popularno-prosvjetno djelovanje: članovi društva preuzimali su na sebe obaveze, da u određenim rokovima dovršavaju radove, i da redovito prate određeni dio nauke. Bila su organizirana javna predavanja za širu publiku, koja su obrađivala različite teme, na pr. »O prostoru i vremenu«, te ciklus predavanja »O strojevima«.

Možda je interesantno da navedemo naučne referate u god. 1875., ne bi li dobili jasniju predodžbu o karakteru rada samoga društva u tom prvom periodu njegovog postojanja.

18. I. F. A. Sludski: »O broju položaja ravnoteže uspravne trastrane prizme koja pliva«.
15. II. J. I. Veinberg: »O molekularnim silama«.
15. III. A. P. Minin: »Opći pojmovi o numeričkim funkcijama«.
20. IX. V. V. Preobraženski: »O neprekidnim razlomcima posebnog oblika«.
N. E. Žukovski: »Iz hidrodinamike«.
18. X. N. E. Žukovski: »Iz hidrodinamike«.
15. XI. A. I. Livencov: »Pokušaj sistematskog izlaganja funkcionalnog računa s jednom nezavisno promjenljivom veličinom«.
15. X. P. L. Čebišev: »O paralelogramu sila na osnovu teorema, koji se odnosi na lukove povučene iz vrhova sfernog trokuta kroz jednu te istu točku«.

Ozbiljni naučni karakter društva izdiže društvo do prvih svjetskih matematičkih društava, koje eto slavi 80-godišnjicu svoga opstanka.

Govoreći pak o 80.-godišnjici jubileja Moskovskog matem. društva ujedno se mora spomenuti i jedna druga 80. godišnjica, koja je upravo u vezi s prvom. Radi se o »Matematičkom zborniku«, koji je bio službeno i redovito glasilo Moskovskog matem. društva. Izdavanje toga najstarijeg i najsolidnijeg matematičkog časopisa u Rusiji zamišljeno je odmah prilikom osnutka društva, da bi svojim vlastitim naučnim časopisom bilo omogućeno u redovitom izlaženju objavljivanje naučnih radova članova društva. Već u aprilu 1865. godine bilo je riješeno da se izdaje taj časopis i to dva sveska godišnje, jer se doskora po osnutku društva bila nakupila dovoljno velika množina referata i predavanja. I nije prošla ni jedna godina od osnutka, a već je časopis ugledao svjetlo, izašla je iz štampe prva sveska toga novoga i prvoga čisto matematičkog časopisa u Rusiji. I časopis je nastao zajedno s društvom. Život u društvu odražavao se i u časopisu. Stoga govoriti o »Moskovskom matem. društvu« znači govoriti o »Matematičkom zborniku«, a govoriti o »Matem. zborniku« znači govoriti o »Moskov. matem. društvu«.

Dok je Brašman bio inicijator i duša mat. društva, dotle je organizator i prvi urednik »Matem. zbornika« bio profesor matematike Moskovskog sveučilišta Avgust Davidov.

Davidov je tipičan predstavnik »prosvjetitelja« šezdesetih godina, čije su zasluge neocjenjive za razvoj narodne kulture. Ne samo da je kao sveučilišni profesor u toku nekoliko decenija odgojio čitave generacije matematičara, čije naučno djelovanje dolazi do izražaja u matematičkom životu Moskve, nego je on poznat i kao pisac uspjelih udžbenika elementarne matematike, koji su kroz dugi niz godina bili uvedeni u Rusiji. Njegov naučni interes pripada uglavnom mehanici. Igra znatnu ulogu u životu raznih naučnih društava u Moskvi, a pored toga je doprinosio i popularizaciji matematičkih, prirodnih i tehničkih nauka. O tome popularizatorskom djelovanju Davidova pišu njegovi biografi: »Davno se utvrdila njegova slava kao osobito iskusnog popularnog lektora. Već u pedesetim godinama na univerzitetu on je čitao cijeli niz javnih lekcija o parnim strojevima. Na njegova predavanja je išla sva inteligentna Moskva toga vremena, i među stalnim posjetiocima tih predavanja bilo je dosta uglednih fabrikanata i vlasnika fabrika, za koje je sadržaj tih predavanja imao naročitog interesa.«

Taj rad Davidova na polju širokog prosvjetnog izdizanja produžavaju i njegovi učenici i saradnici, među kojima je Bugajev poznat kao osnivač i aktivista »Društva za širenje tehničkih znanja«, a Ljetnjikov kao osnivač najvećih srednjih učilišnih zavoda u Moskvi. Od sedamdesetih godina najaktivniji saradnik »Matem. zbornika« bio je N. E. Žukovski. On je kroz nekoliko decenija svoje rasprave najrazličitijeg sadržaja štampao na stranicama »Matematičkog zbornika«. Navest ćemo sada sadržaj prvoga sveska »Matem. zbornika«, koji je izišao koncem 1866. godine, ne bi li na taj način mogli zaključiti o aktivnosti društva, kao i o smjeru njegova djelovanja. Poslije predgovora i biografije o Brašmanu, koji nije doživio izlaženje »Matem. zbornika«, piše N. V. Bugajev o numeričkim identitetima, koji su u vezi sa svojstvom simbola E', a V. J. Cinger o relativnom gibanju bačene točke. N. N. Aleksejev istražuje svojstva integrala algebarskih iracionalnih funkcija, koje se izražavaju jedino logaritmima, a zatim u drugom članku o integraciji diferencijala koji sadrže kubni korijen iz polinoma trećega stupnja. Brašman određuje pritisak rijeke na obalu, koji dolazi od rotacionog gibanja zemlje oko svoje osi. S. S.Urusov raspravlja o integracionom faktoru diferencijalnih jednadžbi. P. L. Čebišev piše o rastavljanju u redove pomoću neprekidnih razlomaka, A. V. Ljetnjikov o uvjetima integracije nekih diferencijalnih jednadžbi. A. J. Davidov ima članak o parcijalnim diferencijalnim jednadžbama bilo koga reda, a K. M. Peterson raspravlja o relacijama i srodstvu među krivim plohama, dok M. F. Handrikov određuje uticaj promjene elemenata zemljinog sferoida na koordinate točaka njegove površine. S. A. Jurjev piše o integraciji diferencijalnih linearnih jednadžbi s promjenljivim koeficijentima, a F. A. Sludski o ravnoteži i gibanju tekućine pri uzajamnom djelovanju njezinih čestica. To je bio sadržaj prvoga sveska »Matem. zbornika«.

Ako uzmemo u obzir, da se na početku Brašmanovog djelovanja na Moskovskom sveučilištu »matematika nalazila na niskom nivou«, tada ćemo polet razvoja razabrati baš iz činjenice, da je »Matematički zbornik« izlazio redovito, i da su njegovi glavni saradnici bili moskovski matematičari, dok je nažalost veza »Matem. zbornika« sa sjajnom plejadom matematičara — učenika Čebiševih — tzv. peterburške škole, bila znatno slabija. Međutim i ako je polet i progres bio siguran ipak su teme, koje je obrađivala moskovska matematička škola, bile donekle ograničene na jedno usko područje i u poredbi sa »peterburškom školom« teoretska matematika u Moskvi zauzima skromnije mjesto. Uza sav polet i postignute rezultate i uspjehe moramo podvući činjenicu, da vanjske prilike nisu bile naročito pogodne za razvoj matematičkih nauka. S kakvim su se poteškoćama borili i u kakvim su teškim uslovima morali raditi možemo razabrati iz riječi predsjednika Bugajeva, što ih je izrekao prilikom proslave 25-godišnjice Društva: »... Te nade su osnovane na vjeri u kulturni progres naše domovine. Nažalost u naše vrijeme nije sve odgovaralo tim nadama. Na razvoj matematičkih nauka zemlja daje vrlo malo. Naše Društvo ne dobija dovoljnu podršku za svoje ciljeve. Sredstva ne dostižu niti za izdavanje jednog toma »Matem. zbornika« godišnje. Ako uzmemo u obzir, da je naše Društvo bilo na pomoć univerzitetu štampajući u svojim izdanjima disertacije mladih učenjaka, tada sredstva, koja za matematičke nauke daje široka zemlja, koja broji 120 milijuna žitelja, poražavaju svojom neznatnošću . . .«

. . . »Nadajmo se, da će matematika i matematičke nauke kad tad u Rusiji kročiti u obliku živoga i plodonosnog djelovanja ne samo u upravnim nego i društvenim sferama. Ta se nada osniva na tvrdoj vjeri, da razrađujući našu nauku, služimo kulturnom razvoju naše zemlje . . .«

Za izdavanje »Matem. zbornika« nije bilo razumijevanja kod mjerodavnih faktora. Poslije punih 25 godina izlaženja dobiva se državna subvencija. Do toga vremena izlaženje »Zbornika« bilo je omogućeno jedino sredstvima, koja su sabrana među članovima društva.

Sastav autora i sadržaj rasprava odražavao je promjene, koje su nastajale u moskovskoj matematici. U prvom periodu izlaženja »Matem. zbornika« pored naučnih rasprava štampaju se i razni pregledi, zatim naučno-popularni članci, recenzije udžbenika. »Zbornik« je ne samo naučni organ, nego i pedagoški, te sadrži i članke metodičkog karaktera kao i zadaće iz elementarne matematike. Dolaze u njemu i zapisnici sjednica »Matem. društva«.

Koncem XIX. vijeka prilike, koje su vladale u Rusiji, nisu bile baš sjajne, a imale su uticaja i na sam »Matem. zbornik«. Duh borbene reakcije toga vremena ispoljio se i na stranicama »Zbornika« u vidu »filozofskih« rasprava P. A. Nekrasova, protiv kojih je snažan otpor pokazivao najveći ruski matematičar toga doba A. A. Markov.

Za vrijeme osamdeset godina svoga postojanja »Matem. zbornik« je znatno promijenio svoj karakter. I ako je u prvom periodu svoga izlaženja imao malu rasprostranjenost i bio je potpuno nepoznat izvan granica, to je kasnije postao jedan rukovodeći časopis sovjetske matematike. Od samog početka u časopisu izlazi cijeli niz prvorazrednih radova. Tako je u jednom od prvih brojeva bila štampana glasovita radnja Čebiševa, u kojoj je dat dokaz zakona velikih brojeva.

Da je »Matem. zbornik« u prvim decenijima svoga izlaženja bio malo poznat dolazi ponajviše odatle, što su članci u njemu štampani isključivo na ruskom jeziku bez ikakovih resumea na nekom od poznatih evropskih jezika. Godine 1896. se odstupilo od toga, jer se tada naslov štampao u dva jezika — ruskom i francuskom. O pitanju izbora jezika u časopisu odigrao je glavnu ulogu N. V. Bugajev, koji je član društva od 1865. godine, a koji je bio njegov treći predsjednik od 1889. do 1904. On je jedan od najaktivnijih autora po broju članaka. Naučni mu je interes bio veoma opsežan. Obuhvaća područje teorije brojeva i analize, a u njoj naročito formalne metode integracije diferencijalnih jednadžbi. U periodu, kada se određivao karakter časopisa, njegovog unutrašnjeg oblika i drugih organizacionih pitanja u pogledu jezika, na kome da se štampaju članci, mišljenja su bila podijeljena. Jedni su mislili, da treba pisati na jednom stranom jeziku zbog toga, da bi radnje ruskih matematičara bile pristupačne i matematičarima izvan granica. Bugajev, tada još mlad učenjak, energično je ustao protiv takvog mišljenja. On je zastupao mišljenje, da ruski učenjaci s interesom prate inostranu literaturu, pa je zahtijevao da i inostranci treba da poklanjaju pažnju ruskom jeziku. On je govorio: »Tko ne cijeni svoga rodnoga jezika, taj sam sebe ne cijeni i ne zaslužuje da ga drugi poštuju. Kada se na ruskom jeziku započnu štampati ozbiljne rasprave, to će se i sami inostranci početi zanimati za naš jezik. Ako oni to ne budu učinili, to će biti na šteti, jer ćemo mi znati više od njih.« Ta tradicija je bila narušena samo god. 1924., kada je bilo riješeno, da se dopuste i rasprave na glavnim evropskim jezicima s resumeom na ruskom, a raspravama na ruskom jeziku da se dodaju resumei na stranom jeziku. Ta novost je i bila razlogom da je »Matem. zbornik« postao pristupačan ne samo ruskom čitaocu, nego i drugima. Danas, kako smo već kazali, taj časopis stoji u redu najozbiljnijih i najrasprostranjenijih periodičnih izdanja iz matematike na zemljinoj kugli.

Pored novčanih pitanja bila su još dva momenta presudna za intenzivniji razvoj »Matem. zbornika«. Tako se ponajprije jasno ispoljavao stari antagonizam između »Moskve« i »Peterburga«. To rivalstvo se pokazivalo u vrlo neznatnoj saradnji matematičara »peterburške škole« u moskovskom »Matem. zborniku«. Između malog broja onih, koji su tu i tamo ponekad davali svoje priloge u »Matem. zbornik« jedini je A. N. Korkin bio aktivni suradnik »Matem. zbornika«, ako ne ćemo da spomenemo sudjelovanje velikog ruskog matematičara Čebiševa. Suradnju Čebiševa ćemo lako razumjeti, ako kažemo, da je on u svoje vrijeme

bio student Moskovskog sveučilišta, i da je s njim održavao drugarsku vezu i u periodu procvata svoga naučnog djelovanja, koje se odvijalo u Peterburgu.

Saradnja je jenjavala i zbog toga što su moskovski matematičari XX. stoljeća počeli sarađivati u inostranim znanstvenim časopisima. Stupivši u življi dodir s inostranim naučnim središtima, što je bilo samo po sebi nešto pozitivno, imalo je eto negativnog odjeka na sam »Matem. zbornik«. Mnoge važne naučne rasprave prijašnjih saradnika odlaze u poznate inostrane matematičke časopise, jer je njihov publicitet bio širi, nego što ga je imao »Matem. zbornik«, koji je štampao članke samo na ruskom jeziku.

Početkom XX. stoljeća se proširuje već spomenuto usko područje tematike obrađivane u »Zborniku«. Uporedo s mehanikom, koju su zastupali najveći učenjaci Žukovski i Čapligin, počinju znatnu ulogu igrati i rasprave iz klasične dif. geometrije, a neposredno pred revolucionarnim periodom znatno je zastupljena teorija funkcija realne varijable. Ni filozofski pogledi članova Moskov. matem. društva, njihovi pogledi na svijet, nisu ostali nepromijenjeni. Ali ono što je glavno za učenjaka, njegov pogled na cijelu nauku, za veliku većinu moskovskih matematičara nije bio podvrgnut promjenama. Taj cilj je formulirao jedan od osnivača društva profesor A. J. Davidov. U jednom govoru štampanom 1869. godine on je rekao: »Makar se cilj svakog znanja sastoji u njegovoj korisnoj primjeni, ipak se nikako ne smije nauku ograničiti takvim ograničenjima. Tko se pri svojim naučnim istraživanjima bude rukovodio isključivo mišlju o praktičnoj koristi, taj će rijetko vidjeti svoja nastojanja ovjenčana uspjesima. Jedinim ciljem nauke mogu biti samo istraživanja zakona prirode«. Takav pravac nazora moskovskih matematičara o cilju nauke svakako je utjecao na nova pokoljenja mladih učenjaka.

Široki razvoj čisto matematičkog djelovanja pada koncem prošlog i uglavnom početkom ovoga stoljeća. Taj čisto matematički interes vezan je u toj epohi u prvom redu s imenom B. K. Mlodzejevskog, zatim D. F. Jegorova, a kasnije N. N. Luzina. Osnovne teme, koje su oni obrađivali, odnosile su se na diferencijalnu geometriju (Mlodzejevski, Jegorov), na diferencijalne jednadžbe i to parcijalne (Jegorov, Čapligin) i najposlije na teoriju funkcija realnog argumenta (Jegorov, u manjem stupnju Mlodzejevski, a najviše Luzin). U godinama 1915.—1916. teorija funkcija realnog argumenta i pitanja iz teorije kompleksne varijable (I. I. Privalov, V. V. Golubjev) sve više i više privlače interes moskovskih matematičara, pa se to odražava i u djelovanju društva. N. N. Luzin se smatra osnivačem matematičkog smjera »teorije skupova«, tipičnog za moskovsku matematičku školu, koja istom poslije Oktobarske revolucije dostiže svoj najveći razvoj. Taj vrhunac je postignut dvadesetih godina, kada na scenu istupa već novo pokoljenje moskovskih matematičara (A. J. Hinčin, D. E. Menjšov, M. J. Suslin, P. S. Urison, P. S. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrentijev, N. K. Bari i dr.). Nastupa period bujnog razvitka sovjetske matematike, a posebno silan porast sovjetske matematičke škole. U Moskvi se pored teorije funkcija počinju kultivirati nova područja i smjerovi matematičke misli: topologija (Urison Aleksandrov, i nešto kasnije L. S. Pontrjagin), teorija vjerojatnosti (Hinčin, Kolmogorov), kvalitativne metode analize (Ljustevnik, Šnireljman, a s druge strane V. V. Stjepanov, V. V. Njemicki i dr.), teorija grupa i uopće algebra (Šmidt, zatim Kuroš). Velike uspjehe postiže moskovska matem. škola i u teoriji brojeva (Geljfond, Šnireljman), i u analizi i to u teoriji diferencijalnih jednadžbi (I. G. Petrovski). Posljednjih godina pred velikom Oktobarskom revolucijom bila je bez sumnje to već prva naučna matematička

škola i međunarodno priznata, ali se mora podvući činjenica, da je uza sve prvoklasne uspjehe, ona išla putevima, koje su utrli predstavnici zapadno-evropske matematičke misli. U današnje vrijeme sovjetska matematička škola, čije pionirske čete čine matematičari glavnog grada Moskve, postigla je pozicije jedne od prvih škola na svijetu dajući prvoklasna otkrića u svim osnovnim dijelovima matematike. Stoga je posve razumljivo da se taj silni porast morao odraziti i u radu onog društvenog organa, koji je oko sebe okupio te moskovske matematičare, t. j. u Moskovskom matematičkom društvu.

Iako se naučni rad moskovskih matematičara nije prekidao niti za vrijeme prvog svjetskog rata (1914.—1918.) a isto tako ni za vrijeme građanskog rata (1918.—1921.), (u to doba je baš u matematičkoj moskovskoj školi bila u središtu pažnje teorija funkcija realne varijable), ipak u prilikama, koje su tada vladale, nije bilo moguće redovito izlaženje »Zbornika«. Tako je XXX. tom obuhvaćao vrijeme od 1916. do 1918. god. Potpuni prekid nastao je od 1919. do 1921., a istom 1922. ponovno i od tada redovito izlazi »Zbornik«.

Poslije revolucije opažamo jaki porast matematičke škole u Moskvi. Godine 1921. otvoren je prvi naučno-istraživački matematički institut na Moskovskom sveučilištu, koji je odigrao vanrednu ulogu u razvoju matematike u SSSR-u, napose u odgajanju novih matematičkih kadrova. Neprestano se proširuje tematika matematičkih istraživanja i postepeno obuhvaća sve grane matematike. Rastu novi matematički kolektivi.

Dopunski svezak 35. toma »Matem. zbornika« (1928.) posvećen je bilansu matematičkog rada u deceniju sovjetske vlasti, i govori jasno o razvoju sovjetske, a napose moskovske matematike.

Tradicionalnog antagonizma između moskovske i peterburške matematičke škole postepeno nestaje. On se zamjenjuje plodonosnim uzajamnim djelovanjem tih dvaju osnovnih centara sovjetske matematike.

Pri tome postoji ipak nešto, što se mora uočiti, a to je, da Društvo, čije su se tradicije stvarale u decenijima prije današnje stvarnosti, nije odmah moglo stići, da odgovori na nove potrebe velike i revolucionarne epohe, nego je počelo da za njom zaostaje. To je zaostajanje ranije ili kasnije moralo dovesti do krize, kada se moralo kidati sa starim temeljima društva i krenuti novim putevima. Do krize je stvarno i došlo koncem 1930. i početkom 1931. godine. Nove organizacione forme u životu društva nisu se mogle odjednom naći, nego istom u toku 1931. godine. Društvo faktički nije ni radilo i novi period u radu Društva započinje s proljeća 1932. godine, kada su obnovljeni ne samo naučni sastanci Društva, nego kada se počinju razvijati i različiti novi oblici njegova djelovanja. Taj preokret u smjernicama i radu Društva nalazi odjeka i u sadržaju »Matem. zbornika«. Tako je reorganizacija matematičkih ustanova pogodila i »Matem. zbornik«. Od 1932. godine »Zbornik« je preuzela nova redakcija i on izlazi kao ujedinjeni organ Moskovskog, Lenjingradskog i Kazanjskog matematičkog društva, čime se podvlači njegov opće savezni, a specijalno »moskovski« karakter. Glavnom zadaćom nove redakcije postalo je okupljanje oko časopisa svih kadrova sovjetske matematike s ciljem, da se on pretvori u veliki matematički časopis međunarodnog značenja, koji bi dostojno predstavljao sovjetsku matematičku nauku. Opseg časopisa se silno povećao. Dok 1933. godine broji 528 stranica, dotle 1937. već dosiže 1260 stranica. Tako je konačno koncem tridesetih godina u moskovskom matematičkom životu prebačen most preko duboke provalije, koja se stvorila između teorije i prakse, a što je naročito važno podvući, bez ikakove štete za visoko teoretski nivo radova specifično »moskovskih« područja matematike, kao što su: topologija, teorija funkcija, opća algebra, funkcionalna analiza i dr. Zato ćemo sada lako razumjeti, da su takvi predstavnici moskovske škole, kao što su Lavrentijev, Tihonov i Frankl tridesetih godina svojim rado-

vima prešli na matematičku fiziku i geofiziku (Tihonov), i na hidro- i aeromehaniku (Lavrentijev i Frankl). Danas postoji cijela mlada škola moskovskih hidrodinamičara, među kojima, osim već spomenutih, treba istaći Kristijanovića i Keldiša.

Drugi bitni faktor, koji se odrazio u naučnom životu Moskovskog društva, bio je opet u vezi s približavanjem tematike moskovske škole praksi, t. j. u procvatu teorije vjerojatnosti početkom tridesetih godina. Osnove joj udaraju Hinčin i Kolmogorov. Cijela ta škola izrasla je na podlozi najrazličitijih ideja teorije skupova, ali se u svome razvoju direktno dodiruje ne samo najnovijih problema savremenog matematičkog izučavanja prirode, nego i svakidašnjih potreba tehnike, napose vojne. Baš u teoriji vjerojatnosti moskovske škole, koja danas zauzima prvo mjesto u svijetu, vidimo jasan primjer uzajamnog plodonosnog uticaja apstraktne matematičke misli i praktičnog djelovanja.

Do ponovnih uspjeha moskovske matematike u teoriji brojeva i u teoriji diferencijalnih jednadžbi, kao i u funkcionalnoj analizi dolazi u periodu tridesetih godina, kada u Moskvu prelazi Akademija Nauka i kada iščezava suprotnost između moskovske i lenjingradske matematičke škole. Moskovski matematičari počinju osjećati, da su ne samo predstavnici svoje moskovske matematičke škole, nego i učesnici jednog većeg kolektiva sovjetskih matematičara. To ipak ne bi bio razlog, da objektivno ne podvučemo osobenosti moskovske škole, kakva je stvorena koncem dvadesetih godina. Svakako da u tim osobenostima ima nečega pozitivnog, ali i negativnog. Kao nešto pozitivno treba svakako smatrati onaj naučni entuzijazam, svojstven uopće mladim naučnim školama, koji je odraz općeg grandioznog poleta stvorenog uvjetima revolucije. Prva pozitivna osobina moskovske mat. škole bilo bi sjedinjavanje svih snaga u savlađivanju konstruktivnih matematičkih radova sa širokim općeteoretskim idejama, sa širokim filozofskim pristupima matematičkim problemima. — Nedostacima moskovske škole, po riječima Aleksandrova, treba smatrati njeno isključivo teoretsko, apstraktno tretiranje matematike, koje često odstupa od života, od prakse. Tim smjerom je pošla moskovska matem. škola dvadesetih godina i tako odstupila od tradicije prvih decenija života Moskovskog matem. društva, čije je naučno stremljenje bilo najjače ispoljeno baš u tijesnoj povezanosti s matematičkim istraživanjem prirode. To udaljavanje moskovske škole od prakse trajalo je skoro 10 godina, kada je postepeno svladano tridesetih godina. U tom svladavanju je naročito pozitivnu ulogu igralo popunjavanje kolektiva moskovskih matematičara s lenjingradskim matematičarima, koji su zajedno s Akademijom Nauka prešli u Moskvu. Među ovima su uvijek bile žive tradicije slavnih »peterburških« analitičara: Čebiševa, Ljapunova, Markova, Steklova, čiji se matematički rad, tako reći, nije nikada udaljavao od mehanike i matematičke fizike. Tu su školu produžili Gjunter i Smirnov, a kao njihovi učenici nastavili Soboljev, Kibelj, Kočin (umro 1945. g.).

Dolazimo sada do najnovijeg perioda u životu Moskovskog matematičkog društva, kada su u velikom domovinskom ratu protiv Hitlerovskog fašizma životne potrebe odbrane dale nečuveni po snazi impuls sovjetskim matematičarima, kada su te potrebe postavile teme za njihove radove.

Resumirajući možemo kazati, da je moskovska škola, u čijem je središtu bilo Moskovsko matematičko društvo, za posljednjih 25 godina načinila zaista grandiozni put. Iako je veliki rat ometao svaki rad, ipak rad Društva nije bio prekinut. Mnogi su članovi Društva bili u redovima Crvene armije, a drugi su opet bili uvučeni u naučni rad obrambenog karaktera. Rat nije prekinuo ni rad časopisa. Redakcija dobija rasprave iz raznih mjesta Sovjetskog Saveza. Niz rasprava su poslali i oni matematičari, koji su bili u Crvenoj armiji za vrijeme rata. Tako je za

vrijeme rata ipak izašlo 5 tomova »Matem. zbornika«. Početkom domovinskog rata bio je »Zbornik« i po kvalitetu materijala i po opsegu jedan od najboljih međunarodnih matematičkih časopisa. Možda da se spomene i svezak 5, 1 (43), koji ima specijalni karakter, jer je sastavljen iz materijala sa međunarodne topološke konferencije.

Na početku rata za vrijeme ljeta 1941. godine bile su prekinute sjednice društva. One se ponovno počinju održavati u jesen 17. septembra, te 1. i 15. oktobra 1941. Kako je došlo do evakuacije Akad. Nauka SSSR i Moskovskog sveučilišta, a kako je rad Društva bio u vezi s njima, to je Društvo na svojoj sjednici od 15. oktobra 1941. zaključilo, da se organiziraju dvije grupe Društva već prema mjestima evakuacije Akademije nauka (Kazanj) i Moskovskog sveučilišta (Ašhabad u Srednjoj Aziji, poslije Sverdlovsk). Rad kazanjske grupe Društva odvijao se u zajednici s Kazanjskim fiziko-matematičkim društvom održavajući redovite zajedničke naučne sastanke dva puta mjesečno.

U jesen 1942. godine Društvo je obnovilo svoj rad u Moskvi. Poslije toga, a naročito poslije pobjedonosnog svršetka rata, veza Moskovskog matematičkog društva s ostalim velikim matematičkim centrima u zemlji postaje iz dana u dan sve intenzivnija i matematičari iz tih gradova dolaze često u Moskvu, da bi na sastancima Moskovskog matematičkog društva saopćili svoje naučne rezultate. Tako su održali predavanja ili referate: Romanov iz Tomska, Savimsakov iz Taškenta, Nikolajev iz Sverdlovska, Čudakov iz Saratova, Vagner iz Saratova, Kočin iz Odese, Aleksandrov iz Lenjingrada.

Društvo se već dugi niz godina sastaje svakog tjedna i to utorkom, kada se referira o svim znatnijim naučnim rezultatima matematičara kako moskovskih tako i iz drugih gradova Sovjetskog Saveza. Pored toga i specijalna zasjedanja Društva nisu više dovoljna, da bi se obuhvatila sva najavljena predavanja, pa ih nekada i na jednom sastanku bude i dva i tri. Kako je intenzivan rad, govori nam činjenica, da je u vremenu od oktobra 1942. do 26. februara 1946. održano 110 naučnih, stručnih predavanja. Pored sastanaka, na kojima se iznose originalni radovi, posljednji sastanak u mjesecu obično je posvećen predavanju ili referatu u obliku pregleda nekog područja ili nekog problema. Treba istaći, da se djelovanje Društva ne ograničava samo na naučne sastanke Društva, nego se ono proširuje i na ostale pojave društveno-matematičkog života u Moskvi a i u cijelom Savezu. Tako se na posebnim sastancima pretresaju udžbenici za više i srednje škole, kritikuju planovi matematike, te predavanja matematike na Moskovskom sveučilištu. Zakazuju se sastanci posvećeni pitanjima filozofskog karaktera, priređuju se popularno-matematička predavanja za nastavnike i učenike srednjih škola, organiziraju se matematičke olimpijade za učenike starijih razreda moskovskih škola. Društvo je osnovalo i godišnju premiju, koja se dodjeljuje mladim matematičarima, dok se na posebnim sastancima postavljaju kandidati za postizanje premije druga Staljina.

Na koncu da navedemo po redu imena predsjednika Moskovskog matematičkog društva, kao i godine kada su bili predsjednici: 1. A. J. Davidov (1867.—1886.); 2. V. J. Cinger (1886.—1891.); 3. N. V. Bugajev (1891.—1903.); 4. P. A. Nekrasov (1903.—1905.); 5. N. E. Žukovski (1905.—1921.); 6. B. K. Mlodzejevski (1921.—1923.); 7. D. F. Jegorov (1923.—1930.); 8. P. S. Aleksandrov (1932. do danas).

Od jeseni 1945. upravu Društva čine: predsjednik: P. S. Aleksandrov; podpredsjednici: A. N. Kolmogorov i V. V. Stjepanov; tajnik: S. A. Galjpern; knjižničar: A. G. Kuroš; blagajnik: A. I. Markušević; članovi odbora: A. F. Bermant, L. A. Ljusternik, V. B. Njemicki, I. G. Petrovski, L. S. Pontrjagin, A. I. Fetisov i S. A. Janovskaja.

*

Da završimo sa nekoliko riječi bacivši pogled na postignute uspjehe i nove smjernice u radu Društva. Ozbiljni polet matematičke misli u Moskvi i daljnji neprekidni njen razvoj odnosi se na godine neposredno pred Velikom oktobarskom socijalističkom revolucijom i uglavnom poslijerevolucionarnim godinama. Zapitamo li se, po čemu se odlikuje taj period u poredbi s periodom stvaralačkih radova genijalnih učenjaka, koji su toliko mnogo doprinijeli u riznicu nauke, moći ćemo odgovoriti ovako: I danas kao i u prošlom vijeku matematičari rade, stvaraju i tim samim obogaćuju i razvijaju svoju disciplinu. Razlika je u tome, što je danas nauka u SSSR postala masovnom. Razlika je u tome, što su nasuprot genijalnim pojedincima, koji su radili odvojeno od ostalih radnika, došli silni matematički kolektivi, koji zajedničkim silama svladavaju poteškoće stvaralačkog puta. Samo društvo matematičara postalo je brojnije. Posve je razumljivo, da su na cio karakter naučnog djelovanja odlučni utjecaj izvršile ideje velikih revolucionarnih podviga, koji su bili izazvani događajima Oktobra 1917. godine.

Ako su se do tada oficijelni vladini krugovi odnosili ravnodušno, a ponekad i neprijateljski prema razvoju nauke u Rusiji (dovoljno je spomenuti riječi jednog carskog ministra o tome, da nauka u Rusiji nije potrebna, a ako ona bude potrebna, to je se može uvijek uvesti iz Njemačke), to je poslije Oktobarske revolucije Sovjetska zemlja pokazala ogromne interese za naukom. Počinje se živjeti novim životom. U svemu, pa i u nauci moralo se računati samo na vlastite snage. Cijelom zemljom su posijani viši naučni zavodi. Svi oni su tražili matematičare viših kvalifikacija, koji su bili sposobni voditi samostalno naučna istraživanja i pružati pomoć i davati odgovor na konsultacije sa strane radnika industrije, seoskih gospodarstava i drugih oblasti nauke. Mali broj dorevolucionarnih sveučilišta nije bio sposoban da dade veći broj specijalista matematičara. Osim toga probudila se kod samih širokih masa želja za znanjem. Nauka je morala postati pristupačna narodu. Porastao je broj viših naučnih zavoda. Naročito je porastao njihov broj tridesetih godina, godina intenzivnog industrijskog razvoja Sovjetskog Saveza.

Duh naučnog kolektivizma pokazuje se u organiziranju specijalnih naučno istraživačkih matematičkih instituta. Njihova organizacija je uticala na porast stvaralačke produktivnosti. Matematičari su počeli osjećati, da njihova istraživanja nisu samo usko lično djelo, nego da imaju opće privredno značenje i da postaju ogromnom silom u životu čovječanstva.

L i t e r a t u r a: 1. Московское математическое общество. P. S. Aleksandrov (Успехи матем. наук, 1946, str. 232-242). — 2. Математический зборник. L. A. Ljusternik (Успехи мат. наук, 1946, 242-248). — 3. Б. В. Гнеденко, Очерки по истории математики в России. (Moskva-Lenjingrad, 1946, str. 156-184).

Milenko Sevdić,
profesor Više ped. škole u Zagrebu

TRIDESET GODINA MATEMATIKE U SOVJETSKOM SAVEZU

Napisali Dr Đ. Kurepa i Dr Vl. Vranić[1]

1. Istaknimo jednu činjenicu: ako ruska država i ima za sobom toliko vijekova opstojanja, Rusi su se u matematici pojavili tek pred stotinjak godina. Ali na kako veleban način! Upravo je nevjerojatno, da se iz nepoznata dijela zemaljske kugle pojavila takova snaga kao što je bio Lobačevski pa da riješi stari grčki problem o paralelama i da time stvori neeuklidsku geometriju i otvori novu eru u razvitku ljudske misli. Jer, ako je prva etapa u postanku matematike bio postupak naših dalekih pređa, kad su, uzdižući se ekonomski, počeli da motre, mjere i broje te time izgrađuju matematiku u njenim eksperimentalnim počecima, ako su nadalje Grci uspjeli da dođu do pojma dokaza i dedukcije te time dali deduktivno-naučni karakter matematici, onda je ruski doprinos, treći bitni doprinos po redu, nešto sasvim novo u matematici, jer daje relativističku crtu matematici, crta koja je iz geometrije prešla i na druge matematičke discipline kao aritmetiku, mehaniku i t. d.

Uz Lobačevskoga (1792?—1856) ruski je narod dao još jednog velikana u matematici, Čebišova (1821—1894) koji se bavio najraznovrsnijim pitanjima matematike, od zakonitosti u nizu prirodnih brojeva i graničnih teorema u računu vjerojatnosti pa do teorije mehanizama.

Najzad ruski je narod dao i Sonju Kovalevsku (1850—1891), najveću matematičarku do danas.

2. I ako život i rad tih glavnih matematičkih predstavnika u Rusiji padaju u prošli vijek, njihova su djela zračila i poslije njihove smrti, pogotovo ako napomenemo da je Čebišov odgojio i okupio oko sebe niz velikih matematičara kao što su Žukovski (1847—1921), A. A. Markov (1856—1922), Ljapunov (1857—1918), Steklov (1863—1926), Čapligin (1869—1942), S. Bernstein (* 1880) i dr.

3. Nikakvo dakle čudo što će se i u sovjetskoj matematici osjećati jak utjecaj ideja najslavnijih ruskih matematičara prije Oktobarske revolucije, pogotovo kad se ima na umu, da je izvjestan broj ovih i sam bio svjedokom velikih političkih i socijalnih promjena 1917 g. i sudionikom nove političke stvarnosti u Rusiji.

Ako čitaoca još podsjetimo da se interes gore citiranih matematičara, uzetih kao cjelina, protezao na dobar dio matematike uopće, bilo da se radi o matematičkoj analizi s aritmetikom, bilo o geometriji ili o mehanici, onda je prirodno da očekujemo da će i nova, sovjetska garda matematičara dobro zastupati sve te discipline. I zbilja, stremljenja sovjetskih matematičara bit će da se nađu što općenitiji zakoni i metode razrješavanja i primjenjivanja. Ako je Žukovski u aerodinamici radio s konformnim preslikavanjima i analitičkim funkcijama, Lavrentijev (* 1902) će raditi s kvazikonformnim preslikavanjima, ako je Steklov radio s Riemannovim integralima i rješavao linearne probleme, M. N. Krilov (* 1879), † Mandelstam, † Papaleksi, Andronov i naročito Bogoljubov (* 1908) obrađivat će nelinearne probleme koji od pojave elektronske lampe i teorije relativnosti zauzimaju sve važnije mjesto u matematičkoj fizici. Ako je Čebišev u teoriji brojeva radio elementarno i sintetički, Vinogradov (* 1891), Šnirelman (1905—1939), Hinčin (* 1894), Romanov (* 1905) i dr. radit će analitičkim metodama i postizavati uspjeh za uspjehom; ako je Luzin (* 1883) tik pred prvi svjetski rat išao u Pariz da izučava novonastalu teoriju realnih funkcija, već će se 1916 i 1917 pojaviti, s bitnim matematičkim prilozima, u Izvještajima pariške Akademije nauka imena od 4 mlada učenika (Aleksandrov, * 1896, Menjšov * 1892, Hinčin *1894 i Suslin 1894—1919) toga mladog profesora; ako će najdarovitijeg od njih, Suslina, uskoro i pokositi tifus, Luzin će ipak osnovati čitavu naučnu školu, moskovsku školu u teoriji skupova i realnih funkcija.

[1] Kolokvij matematičko-fizičke sekcije od 10. 12. 1948.

Ako je 20-tih godina ovog stoljeća student Urison (1894—1924) počeo zajedno s nekoliko svojih drugova da se zanima za novu matematičku nauku, topologiju, Moskva će za desetak godina postati svjetsko topološko mjesto s posebnim topološkim seminarom koji će 1935 organizirati i svjetski kongres topologa, ako su bretanjski morski valovi i smrskali samog genijalnog osnivača moskovske topološke škole Urisona.

Inače sovjetska se matematika i danas može da ponosi: Kaganom (* 1869), najboljim, uz pokojnog Varićaka, poznavaocem radova Lobačevskoga, koji upravlja Seminarom za tenzorsku analizu i izdaje Izvješća toga seminara (pisana vektorski i tenzorski), a ove je godine izdao prvi tom magistralnog djela Teorija površina; te S. Bernsteinom (* 1880) kao najboljim poznavaocem i nastavljačem ideja Čebišova. Agilni i svestrani inženjer-matematik A. N. Krilov (1863—1945)[2] jedna je od bitnih kopča između dorevolucijske i izarevolucijske matematike sa čitavim sjajem i mogućstvima primjene matematike u tehnici uopće u brodarstvu napose. Toliko o kontinuitetu matematike u Rusiji.

4. Sa druge strane, na prelomu prošlog i ovoga vijeka razvila se zaslugom triju Francuza R. Baire-a (B. — funkcije), E. Borela (B.-ovi skupovi i H. Lebesgue-a (L.-ova mjera skupova) takozvana teorija realnih funkcija koja je zajedno s teorijom operatora uskoro postala dominantna matematička disciplina. Ta »moderna« u matematici privukla je i one koji su se bavili i drugim matematičkim problemima. Tako je bilo i s Jegorovom (1869—1930) profesorom moskovskog univerziteta i koji je prešavši oko 1910 s geometrije na teoriju skupova ubrzo, 1911, došao do jednog lijepog teorema[3], a Luzin 1912 do jednog sličnog teorema[4].

Ta dva teorema povezuju staru klasu neprekidnih funkcija s novouvedenim izmjerivim funkcijama i čine početak t. zv. moskovske škole realnih funkcija predstavljenu imenima: Jegorov, Luzin, Hinčin, P. Aleksandrov, Novikov, Lavrentijev, Kolmogorov (* 1903), Njemicki, Menjšov, Nina Bari, Ludmila Keldiš i dr.

5. U teoriji brojeva i diofantskih aproksimacija sovjetski su matematičari dali bitnih i prekrasnih priloga. Tako je staroj Goldbachovoj hipotezi iz 1742 g. da je svaki paran broj suma od dva primbroja dao 1930 Šnirelman (1895—1938) sasvim drugi oblik i dokazao da je svaki prirodan broj suma od najviše 800.000 primbrojeva (postepenim snizivanjem došlo se da se umjesto toga broja može uzeti i 67); 1937 Vinogradovu (* 1891) je pošlo za rukom da pokaže da je svaki dovoljno veliki neparni cijeli broj suma od tri primbroja. Prijeđimo od prirodnih na realne brojeve. 1929—30 Gelfond (* 1906) i Kuzmin (* 1891) pokazali su da je $2^{\sqrt{2}}$ transcendentan, čak da je transcendentan i svaki broj oblika a^b, ako su samo a, b algebarski brojevi i uz to a različit od 0, a b iracionalan. Onaj koji zna koliko je vijekova prošlo dok se konačno 1882. nije riješio problem kvadrature kruga ili aritmetički govoreći dok se nije upoznala priroda broja $\pi = 3{\cdot}14\cdots$, znat će ocijeniti značaj tih rezultata. Kao što su π ili e brojevi koji se javljaju kod vrlo mnogo razmatranja u prirodi, tako su Rusi došli i do drugih univerzalnih konstanata[5].

---

[2] U Glasniku, 1947, str. 119—130 nalazi se Sevdićev članak o Krilovu.

[3] Ako niz izmjerivih funkcija konvergira na izmjerivom skupu E, onda za svaki broj $\varepsilon > 0$ sadrži skup E jedan perfektan dio P koji se po mjeri razlikuje od ε za manje od E i na kojem promatrani niz funkcija konvergira uniformno.

[4] Ako je $f(x)$ izmjeriva i konačna funkcija na izmjerivom skupu E, onda za svaki $\varepsilon > 0$ postoji perfektan skup P u E tako da mjera razlike $E—P$ bude $< \varepsilon$ i da funkcija $f(x)$ bude na P čak neprekidna.

[5] Pojava konstanata u matematičkom izučavanju prirode nije nikakav fetišizam ili mistika nego je znak da je čovjek uhvatio žicu izvjesne zakonitosti u prirodi.

Ako ma koji iracionalan broj između 0 i 1 napišemo kao neprekinuti razlomak

$$\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2} + \ldots} \qquad \text{ili kraće } (a_1, a_2, a_3, \ldots)$$

tad je Hinčin dokazao da je

$$\lim \sqrt[n]{a_1 \, a_2 \ldots a_n} = 2{,}6 \ldots \left(\text{zapravo} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k\,(k+2)}\right)^{\frac{lk}{l2}}\right.$$

za gotovo svaki iracionalni broj (t. j. za sve izuzev njih »mjere nula« — pojam koji je direktni uvod u modernu teoriju mjere). Hinčin je također pokazao da će se pojedini prirodni broj n tim rjeđe pojavljivati kao jedan od brojeva gornjih nizova $a_1, a_2, \ldots$ čim je n veći.

Bar po imenu treba još da spomenemo Čebotarova (1894—1947), Kuroša (* 1908) te Šmida (* 1891) koji se bavi teorijom grupa a poznat je i široj publici, jer je učestvovao u poznatoj polarnoj ekspediciji.

6. Pređimo na račun vjerojatnosti. I u ovom području udio je sovjetskih matematičara vrlo velik. Rusi su se već u 19. vijeku mnogo bavili teorijom vjerojatnosti naročito Čebišov, Markov i Ljapunov. Osnovni zakon u računu vjerojatnosti je Zakon velikih brojeva, koji povezuje teoriju s praksom. Znamo da je vjerojatnost, da ćemo kod bacanja novca dobiti »pismo« jednaka ½, no to ipak u konkretnom slučaju ne znači da bacajući 10 puta novac ne bude 5 puta »pismo« a 5 puta »grb« nego recimo svih 10 puta pismo. Prema modernoj genetici isto zaključivanje važi da li će novorođenče biti muško ili žensko. Međutim ako novac bacamo vrlo veliki broj puta, onda je gotovo sigurno da će ipak polovina broja puta biti pismo a polovina grb ili drukčije rečeno, tada će gotovo sigurno vjerojatnost biti ½ da će pasti pismo, odnosno drugim riječima: ako je p vjerojatnost svakog od n događaja, pa ako je μ broj povoljnih faktičnih događaja među njih n, onda se za vrlo veliki broj n pokusa vjerojatnost a posteriori $\frac{\mu}{n}$ po volji malo razlikuje od vjerojatnosti p a priori. Postoji dakle za neki proizvoljni broj $\varepsilon > 0$ broj n_0 tako, da je skoro sigurno

$$\left| \frac{\mu}{n} - p \right| < \varepsilon \quad \text{t. j.} \quad -\varepsilon n < \mu - np < \varepsilon n, \quad \text{ako je samo} \quad n > n_0.$$

U tom obliku Zakon velikih brojeva potječe od Jakoba Bernoulli-a. Taj zakon posveopćio je Čebišov sa teoremom, koji i nosi njegovo ime, a koji glasi:

»Ako su $x, y, z, \ldots v$ veličine, koje su međusobno nezavisne i podvrgnute slučaju, nadalje $a, b, c, \ldots k$ srednje vrijednosti tih veličina, onda se može s vjerojatnošću

$$1 - \frac{1}{t^2}$$

očekivati, da će razlika

$$x + y + 2 + \ldots + v - (a + b + c + \ldots + k)$$

ležati između granica

$$-\,t \sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \ldots + k_1 - (a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + k^2)}$$

$$\text{i} \quad t \sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \ldots + k_1 - (a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + k^2)}$$

gdje su $a_1, b_1, c_1 \ldots k_1$ srednje vrijednosti od $x^2, y^2, z^2 \ldots v^2$

Drugi stavak Čebišova mogao bi se ukratko ovako definirati:

»Kod dosta velikog n može se očekivati s vjerojatnošću, koju možemo uzeti tako blizu 1 kako želimo, da se aritmetička sredina međusobno nezavisnih veličina vrlo malo razlikuje od aritmetičke sredine srednjih vrijednosti prije spomenutih veličina.«

Ti stavci znače znatno proširenje i produbljivanje Zakona velikih brojeva i otvaraju put u one metode, koje su se kasnije pokazale tako plodonosne u matematskoj statistici. Čebišov je stvorio svoju školu, koja se bavila Zakonom velikih brojeva, pa su se uz njega na tom području istaknuli naročito Markov i Ljapunov. Markov je postao međutim glasovit istraživanjem međusobno zavisnih događaja t. zv. lančastih procesa od kojih se istraživanja mogu još očekivati vrlo duboki rezultati kako s teoretskog tako i praktičkog gledišta.

Hinčinu je pošlo za rukom da dokaže da za proizvoljni broj $\varepsilon > 0$ ne samo da je gotovo sigurno $\mu - np$ sadržano između $-\varepsilon n$ i $+\varepsilon n$, nego čak i između $-A$ i A, gdje je

$$A = (1 + \varepsilon) \sqrt{2\, np\, (1-p)\, l l n}\,,$$

ako je samo $n > n_0$, pričemu n_0 zavisi jedino od ε.

Svakako su ti radovi Čebišova i njegovih učenika dali smjer proučavanju teorije vjerojatnosti sovjetskih matematičara kojih se radovi u neku ruku nastavljaju na radove gore navedenih matematičara. Tu bismo spomenuli u prvom redu S. N. Bernštajna (* 1880), koji si je postavio zadatak, da stvori logički besprikornu teoriju matematske statistike. Kod toga mu je bilo bitno, da izvodi te teorije ne budu samo prosta igra razuma, već da izdrže i empiričko provjeravanje. On je svoja razmatranja provjerio specijalno na biološkim opažanjima i to naročito u teoriji nasljeđivanja. Bernštajn je 1927 izdao svoj udžbenik Teorije vjerojatnosti od kojega je nedavno izašlo četvrto izdanje. To je odličan rad u kome je Bernštajn skupio sve svoje znanje, iskustvo i rezultate svoga rada.

Od ostalih sovjetskih matematičara spominjemo važnog predstavnika matematske statistike Romanovskoga. Romanovski, koji je po godinama vršnjak Bernštajna, profesor je u Taškentu i stvorio je tamo svoju školu. Romanovski je radio i na važnim pitanjima poljoprivrede i industrije, pa je i na taj način ukopčao matematiku u probleme svoje domovine.

Najmlađa škola sovjetskih matematičara u toj struci povezala se s teorijom skupova. Hinčinu, a pogotovo Kolmogorovu pošlo je za rukom pokazati, da postoji puna analogija između teorije skupova i teorije vjerojatnosti. Vrlo lijepo obradio je to pitanje upravo Kolmogorov. Njegova je zasluga, da je aksiomatički utvrdio teoriju vjerojatnosti na osnovu nauke o skupovima. Vodeća misao bila mu je kod toga, da izgradi matematički neprotuslovnu teoriju vjerojatnosti. To nije ranije bilo moguće sve dok nije Lebesgue uveo pojam mjere skupa i svoju teoriju integrala. Stvarno se na osnovu tih istraživanja dobila puna analogija između mjere skupa i vjerojatnosti događaja, kao i između integrala funkcije i matematičke nade događaja. Osnovni aksiomi, koje postavlja Kolmogorov kao temelj teorije vjerojatnosti glase:

Neka je E skup elemenata $x, y, z, \ldots$, koje zovemo elementarnim događajima. F neka je skup dionih skupova iz E, elementi skupa F zovu se slučajni događaji. Uz te pretpostavke glase aksiomi:

1. F je skupovno tijelo
2. F sadrži skup E
3. Svakom skupu A iz F je pridružen nenegativni broj $P(A)$. Taj broj $P(A)$ zove se vjerojatnost događaja A.
4. $P(E) = 1$
5. Ako su A i B disjunktivni, onda je

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

6. Za slijed $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots \supset An \supset \ldots$
događaja iz F s prosjekom
$$A_1 A_2 A_3 \ldots An \ldots = 0$$
vrijedi jednadžba
$$\lim P(An) = 0$$

Ti aksiomi čine osnov matematičke teorije vjerojatnosti u kojoj se razmatraju odnosi t. zv. slučajnih ili stohastičkih veličina t. j. veličina, koje mogu poprimiti različite vrijednosti, ali za svaku vrijednost postoji izvjesna vjerojatnost koju treba isto uzeti u račun. Na tom području sovjetski su matematičari, a naročito Slucki, Kolmogorov i Hinčin dali već zamjernih rezultata.

8. Topologija je u Sovjetskom savezu na zavidnom stupnju. Rekli smo da je Urison (1894—1924) osnivač moskovske škole u topologiji. Urisonovi rezultati o metrizaciji prostora, njegova teorija dimenzija i t. d. znatan su prilog u teoriji skupova. Mladić Pontrjagin (* 1908) istakao se već 1926 dokazom na novoj bazi centralnog topološkog teorema o dualnosti, što ga je 1922 našao Amerikanac Alexander. Naročito se pročulo kad su tridesetih godina Šnirelman (1905—1939) i Ljusternik (* 1898) na topološki način riješili jedan problem koji se bio Poincaré-u nametnuo kod istraživanja nebeske mehanike i dokazali da svaka konveksna površina ima na sebi barem tri zatvorene t. zv. geodetske linije od kojih nijedna ne siječe samu sebe[5]. Od topoloških metoda isto kao i od numeričkih i grafičkih još se mnogo ima očekivati u matematici kako teoretskoj tako i primijenjenoj.

9. Korisno je pogledati i geografsku raspodjelu sovjetskih matematičara. Dok se prije svjetskog rata matematički život odvijao uglavnom u Petrogradu i donekle u Moskvi i Harkovu, danas je u Sovjetskom savezu Moskva svakako najjači matematički centar, ali se matematika uspješno gaji i u desecima drugih sovjetskih gradova, počam od Moskve, Lenjingrada, Harkova, Odese, Saratova, Tomska, Tbilisa i t. d. pa sve do Vladivostoka. Vrlo su dobro zastupani Gruzijanci. I još nešto. Ne radi se izolirano nego se radi u grupama, pa svaka grupa odmah izdaje i svoje glasilo, tako da su pojedini vrlo važni matematički rezultati objavljeni u izvještajima kakvih neznačajnih visokih škola, pa su zato i bili nepristupačni naučnom svijetu izvan Rusije.

10. Kazat ćemo nešto i o matematičkoj literaturi i periodici. Svakako je zadnjih 30 godina učinjeno i u tom pogledu vanredno mnogo. Uz opće poznati Математически Сборник u Moskvi (koji ove godine slavi 80-tu godišnjicu svojeg postanka) isto kao i Известия Akademije nauka danas u Sovjetskom savezu izlaze vrlo reprezentativni matematički časopisi kao na pr. Прикладная математика и механика (počam od 1937), Успехи математических наук (од 1936) kao i mnoštvo izvještaja pojedinih instituta, škola, seminara i t. d. Piše se mnogo i knjiga, osobito zadnjih 15 godina. Mi od sovjetskih matematičara možemo u budućnosti još više očekivati, naročito dobro uređen centralni referativni svjetski list kao što je prije zadnjeg rata bio Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik ili Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete ili kao što je danas američki list Mathematical Reviews.

---

[5] Kugla ima neizmjerno mnogo takovih linija: to su presjeci kugle s ravninom kroz središte kugle. Međutim nipošto nije evidentno da će deformirana konveksna kugla na pr. jaje imati takovih linija, isto kao što nije baš evidentno da će svaka deformirana kružnica u ravnini zadržati svojstvo kružnice da odjeljuje nutrašnji dio kružnice od spoljašnega. U topologiji ima mnogo stvari koje nam izgledaju jasnima ali koje još ne znamo i dokazati. Takav je problem o 4 boje (isp. Blanuša, ovaj Glasnik, I, 1946, 31—42) ili problem da li je kugla jedina konveksna površina sa svojstvom da se iz fakta, da se ma koje dvije njene geodetske linije sijeku u jednoj točki može zaključiti da se one sijeku u još jednoj točki.

11. Ne možemo mimoići a da ne spomenemo jednu naročito važnu činjenicu: poznato je da su mnoge matematičke istine našli vanredno mladi ljudi (na pr. Galois, Gauss, Abel i t. d.); ali da bi u matematici bilo zastupljeno toliko mladih ljudi, to se prije sovjetskog saveza nije nigdje dogodilo! Nevjerojatni polet i oduševljenje pokazali su sovjetski matematičari u svojem djelu.

Zaključimo riječima kojima je P. S. Aleksandrov zaključio svoj prikaz Развитие математики в нашей стране* povodom proslave 220-godišnjice Akademije nauka u Rusiji odnosno S. S. S. R.

»Još nije vrijeme da preciziramo sadržaj one nove epohe u matematici koju paralelno sa drugim matematičkim školama određuje stvaralački napon sovjetske matematičke misli. No o tom da ta nova epoha ne zaostaje niti za najproduktivnijim epohama prošloga stoljeća kao i o tom da u njoj sovjetskoj matematičkoj školi pripada jedna od prvih i najuticajnijih uloga, o tome nema sumnje«.

Literatura:

1. Вестник Академии Наук СССР, 1945 (220 godišnjica Akademije).
2. В. В. Гнеденко, Очерки по истории математики в России, Москва-Ленинград 1946.
3. Юбилейный Сборник посвященный тридцатилетию Великой октябрьской Социалистической Революции, М.-Л. 1947, I. (izdala Akademija nauka, 1947).

* Вестник Академии наук С. С. С. Р., 1945, № 5—6, стр. 35—55.

Dr Željko Marković,

UVOD U VIŠU ANALIZU

II dio, svezak 1, Zagreb, 1947, N. Z. H., 160 str.; cijena 160 Din.

O prvom dijelu knjige Dr Ž. Markovića bilo je govora u tomu 1 ovoga Glasnika (godine 1946, str. 44—46).[1] Dajemo kraći prikaz od početka drugog dijela te knjige iz razloga da naši čitaoci saznaju za to djelo i da ga mogu nabaviti.

Po ozbiljnosti, dubini i načinu izlaganja može se za sv. II_1 reći ono što smo rekli za prvi dio. Autor je na 160 strana dao relativno mnogo materijala iz osnova linearne algebre (determinante, matrice, vektori, linearni alg. sistemi), — glava I, II, str. 1—55, analitičke geometrije u prostoru (str. 56—97) te diferencijalni račun funkcija s više varijabla (str. 98—160).

Glava I, str. 1—31, obrađuje determinante i matrice; metoda je ispočetka induktivna, a onda se obrađuje opći slučaj; lijepo su prikazane osnovne operacije s determinantama i matricama i njihove primjene kod sistema linearnih sistema linearnih alg. jednakosti. Glava II, str. 32—55 obrađuje vektore: najprije radiusvektore i opće vektore u prostoru a onda i u prostoru s n dimenzija pa na koncu i pojam vektora u jednom prostoru funkcija koji ima neizmjerno mnogo dimenzija. Osnovne operacije s vektorima: zbrajanje, oduzimanje, skalarni i vektorski produkt, trofaktorski i četverofaktorski produkti prikazani su jasno i sažeto. Isto važi za linearnu zavisnost i nezavisnost vektora, pojam koji u skalarnoj formulaciji zadaje studentu znatnih poteškoća ali koji kod vektora zvuči vrlo uvjerljivo i jasno. Tako su na pr. tri vektora linearno zavisna, ako i samo ako sva tri leže u jednoj te istoj ravnini ili se translacijom mogu smjestiti u jednu ravninu; navodi se i karakteristično svojstvo linearne zavisnosti vektora — iščezavanje determinante kojoj su pojedini retci

[1] Napominjemo da je 1947, s neznatnim izmjenama, izašlo i drugo izdanje prvog dijela.

sastavljeni od komponenata pojedinih promatranih vektora. Šteta što, s tim u vezi, nije izrazitije naznačen geometrijski karakter determinante — kao volumen paralelepipeda kojemu su bridovi iz jednog vrha predočeni vektorima sa elementima pojedinog stupca (ili retka) determinante kao svojim komponentama.

Imajući tako u rukama elemente linearne algebre može se u trećoj glavi, str. 56—97 prijeći na analitičku geometriju prostora; sada je izlaganje vrlo elegantno i kratko — jer vektori i determinante su prikladna oruđa za takva izlaganja. Čovjek uviđa koliko nam vektori omogućuju da lako usvojimo analitičke uslove o okomitosti, paralelizmu i t. d. koji su inače, skalarno uzeto, dosta teški za pamćenje. Analitička obrada pravca i ravnina zbilja je sugestivna — dodajem samo da je ispušten uslov (nuždan i dovoljan) da sva tri broja A, B, C ne smiju iščezavati pa da $Ax + By + Cz + D = 0$ predočuje, u Descartesovim koordinatima, ravninu. Autor ukratko prikazuje i površine drugog reda pa je naročito lijepo prikazano da je jednoplošni hiperboloid sastavljen od pravaca, a kod paraboloida se čak vidi kako oni nastaju translacijom jedne parabole tako da joj pritom vrh klizi po drugoj paraboli smještenoj u ravnini koja je okomita na ravninu u kojoj leži parabolela u pokretu.

Ali sve tri prve glave imaju uvodni karakter i čine potrebnu pripravu da se u glavi IV prijeđe na sam diferencijalni račun funkcija s više varijabla. Izlaganje toga dijela je i zorno i koncizno. Ističemo predočivanje funkcija pomoću nivo-elemenata pa dalje pomoću nomograma (i tabelarno preedočivanje ovdje bi dobro došlo, ma da je već uzeto kod funkcija s jednom varijablom u Analizi I). Dobro je prikazan pojam direkcione derivacije, gradijenta, diferencijala i t. d. Autor uvodi totalni diferencijal kao glavni dio prirasta funkcije pa dokazuje da je, u slučaju kontinuiteta parcijalnih derivacija prvog reda, takav diferencijal također suma produkata od parcijalnih derivacija i porasta nezavisnih varijabla, da je na pr.

$$df(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

Obično se ta dovoljna pogodba za ispravnost na pr. napisane formule (inače ima autora koji po definiciji polaze od te formule) dovoljno ne ističe, pa se zato i krivo misli da derivacija funkcije u zadanom smjeru mora vazda biti projekcija gradijenta te funkcije na taj smjer (za ilustraciju neka čitalac promotri kako se u tom pogledu vladaju u točki (0,0) funkcije

$$\sqrt[n]{x^n + y^n} \quad \text{za} \quad n = 1, 2 \text{ i } 3).$$

Onaj dio pete glave, str. 148—160, koji je smješten u II_1 obrađuje na vrlo potpun način dokaze o implicitnim funkcijama (1 varijabla, više varijabli, sistemi implicitnih funkcija).

Po naravi stvari, stil i prikaz u drugom dijelu Analize je mnogo sažetiji, pa od čitaoca i više zahtijeva nego Analiza I. I ovdje ima dosta slika — 57 grafova — a vjerujemo da će se i mnogi bolji poznavaoci matematike iznenaditi kad pročitaju u djelu Markovića da okrugli ∂ t. j. simbol ∂ što ga upotrebljavamo kod parcijalnog deriviranja potječe ne od Jacobi-a (1841) nego od Legendre-a (1786); isto tako da je simbol $|a_{ik}|$ za determinante uveo (1861) H. Smith a ne Kronecker.

Mislimo da bi djelo bilo još potpunije da ima više numeričkih primjera i problema.

Završno možemo reći, da je ovaj svezak *Uvoda u Analizu* lijep doprinos našoj matematičkoj literaturi pa svi oni koji se bave matematičkom analizom i njenim mnogostrukim primjenama u geometriji, mehanici, fizici, tehnici pa i u aritmetici u užem smislu željno očekuju da izađu i drugi svesci toga djela.

Đ. K.

Vidoje Ž. Veselinović:

PRIVREDNA MATEMATIKA

Prva knjiga. Drugo dopunjeno izdanje. Izdanje izdavačke sekcije akcionog odbora studenata Beogradskog univerziteta. Beograd 1947. Strana 216. Cijena 85 dinara.

Najnovija knjiga Vidoja Veselinovića zapravo je novo izdanje njegove Trgovačke računice, koja je izašla 1946. Međutim ovo novo izdanje znatno je prošireno spram ranijega izdanja, što se vidi i po broju stranica, jer ovo izdanje ima oko 45 stranica više. Knjiga je namijenjena studentima prve godine Ekonomskog fakulteta Beogradskog sveučilišta, ali ona će naravno dobro poslužiti i Ekonomskim fakultetima ostalih sveučilišta u našoj državi.

U knjizi se obrađuju prije svega osnovne računske radnje. Zatim se prikazuju temeljni računi, koji su potrebni u privredi kao na pr. omjeri i razmjeri, pravilo trojno, verižni račun, postotni i promilni račun, kamatni račun, prosječna i srednja vrijednost, račun diobe i račun smjese. Posebno je poglavlje posvećeno računu zlata i srebra, valutama i devizama. Konačno je u jednom poglavlju obrađena kalkulacija. Knjiga je pisana lakim stilom i vrlo jasno, te se zaista preporuča kao udžbenik te grane matematike.

Potrebno je spomenuti, da je knjiga prema ranijem izdanju proširena naročito u poglavlju o računskim olakšicama i vidi se, da im pisac pridaje mnogo važnosti. To je poglavlje vrlo zanimivo i ako se ja lično ne bih složio s piscem, da li je ono zaista i važno u doba kada se računske operacije vrše pretežno računskim strojevima. Knjiga je osim toga povećana za poglavlja: Izrada i upotreba tablica jednostavnih kamata, notiranje deviza i valuta, trgovina zlatom i srebrom. Mnogo je prošireno i poglavlje o kalkulaciji, koje je u ranijem izdanju obsezalo 11 stranica, dok u sadanjem izdanju ima 20 stranica. Tih novih 9 stranica posvećeno je kalkulaciji na osnovu jedinstvene prodajne cijene u našoj državi.

Velika je odlika knjige, da je gradivo razrađeno na brojnim primjerima. Osim primjera uz sam tekst, knjizi je dodana zbirka od 160 različitih dobro izabranih primjera i vjerujem, ako netko sve te primjere proradi, da je uspješno svladao gradivo.

Kao što sam naglasio, knjiga je dobro pisana i daje svakako mogućnost da se nauče osnovi Privredne matematike. Očito da knjiga ima da posluži i đacima Ekonomskih tehnikuma, zbog čega se u njoj i obrađuju u tolikoj opširnosti i elementarni zadaci za koje bi se moralo predpostaviti, da ih studenti već znadu. Tako me ponešto smeta, da se u udžbeniku, koji je namijenjen za sveučilišni studij, mora protumačiti, kako se računa s običnim i decimalnim razlomcima. Moguće da pisac, kome je očito poznato s kakovim bijednim znanjem iz matematike studenti dolaze na sveučilište, niti nema tako krivo. Činjenica je međutim, da te elementarne računske radnje zauzimaju u knjizi 44 stranica dakle 20% cijele knjige, dok kalkulacija, koja je daleko važnija i zbog koje se i uči Privredna matematika zauzima svega 20 stranica dakle niti 10% čitave knjige. Mislim, da bismo imali pravo zahtjevati od srednje škole da nam na fakultete šalje đake, koji su svladali barem osnovno gradivo iz matematike, tako da se fakulteti mogu posvetiti u cjelosti svojim zadacima.

Pisac veli u predgovoru, da prima svaku primjedbu sa zahvalnošću i da će je imati u vidu pri kasnijem izdanju. Vodeći računa o toj želji, imao bih još nekoliko primjedaba.

Na str. 24 svoje knjige, spominje pisac poznatu probu s brojem 9 i pokazuje, kako se pomoću te probe kontrolira ispravnost množenja, pa to pokazuje na jednom primjeru i zaključuje:

»Rezultat je dobar, jer je devetični ostatak u proizvodu 3, a kod proizvoda devetničkih ostataka u množeniku i množitelju takođe 3.«

Toj rečenici želio bih ipak primjetiti slijedeće. Ako je produkt dvaju brojeva ispravan, onda mora i devetični ostatak produkta biti jednak devetičnom ostatku produkta devetičnih ostataka tih dvaju brojeva. Međutim obrat ne mora vrijediti. Iz činjenice, da je devetični ostatak produkta dvaju brojeva jednak devetičnom ostatku produkta devetičnih ostataka tih brojeva, ne slijedi, da je produkt ispravan. Pisac kao dokaz za svoju tvrdnju uzima produkt

$$6425 \cdot 7521 = 48322425$$

Recimo, da smo se u množenju zabunili i napisali

$$6425 \cdot 7521 = 48322434$$

Devetični ostaci multiplikanda i multiplikatora su 8 odnosno 6, a njihov produkt je 48 odnosno devetični ostatak tog produkta je 3. Isto toliko iznosi devetični ostatak od 48322434 a ipak taj broj nije jednak produktu od 6425 i 7521. Kontrola s brojem 9 ne vrijedi dakle 100%-no i važno je da se to u knjizi istakne, ako ne želimo, da kod čitača u tom pogledu nastanu krivi pojmovi.

Imao bih još jednu dobronamjernu primjedbu. Imam naime osjećaj, da je pisac želio udovoljiti svojim slušačima ili bolje reći onima, koji se spremaju za ispit, da im što prije pruži potreban udžbenik obzirom na to, da je ranije izdanje rasprodano. To je očito razlog, da je knjiga samo proširena za gore spomenuta poglavlja, dok je sav ostali sadržaj knjige i primjeri ostali u glavnom nepromijenjeni. Međutim — i ako su primjeri s matematske strane besprikorni — trebalo bi ih ipak malo modernizirati t. j. prilagoditi više našim prilikama. To neka se ne shvati kao prigovor, već samo kao iskrena želja, da knjiga, koja je vrlo dobra, bude još bolja.

Dr. Vladimir Vranić

Ivo Lah i Friderik Žorga:

TABELE ZA FINANČNO IN AKTUARSKO MATEMATIKO

Naklada državne založbe Slovenije, Ljubljana 1947. Str. 80.

Ivo Lah, ovlašteni aktuar Državnog zavoda za socijalno osiguranje i Friderik Žorga, profesor Državne gospodarske šole u Ljubljani izdali su Tablice financijske i aktuarske matematike kao priručnik za đake Ekonomskih tehnikuma, te za činovnike u financijskim ustanovama, te za aktuare. Knjiga se sastoji iz 6 najvažnijih tablica financijske matematike za kamatne stope od 2% do 7%. Te tablice preuzete su u glavnom iz poznatih tablica Simona Spitzera, te su svakako najpotpunije tablice te vrste, koje su kod nas izašle. Velika im je prednost da su podjednako izrađene za dekurzivni i za anticipativni kamatnjak. Te tablice, koje je skupio i popunio Friedrik Žorga opsižu 32 stranice.

U knjizi nalaze se osim zbirke najvažnijih formula financijske i aktuarske matematike još i Tablice za aktuarsku matematiku, koje je sastavio Ivo Lah. Tu nalazimo na 34 stranice slijedeće tabele: Tablica smrtnosti slovenskog naroda i to posebno za muška i posebno za ženska lica. Nadalje su uz tablicu sadržane i računske osnovice jugoslavenskog mirovinskog osiguranja.

Tablica smrtnosti slovenskog naroda t. j. pučanstva bivše Dravske banovine izračunata je na osnovu podataka iz godina 1931.—1933. Ta tablica nije do sada bila objavljena, ali se upotrebljava u našem socijalnom osiguranju kod računa kapitalnog pokrića udovičkih i dječjih renta odnosno posmrtnina. Računske osnovice jugoslavenskog mirovinskog osiguranja, koje su sadržane u toj knjizi, osnivaju se upravo na tim tablicama, te na statistici rodbinskog stanja osiguranika bivšeg Federalnog zavoda za socijalno osiguranje Slovenije, te na osnovu vjerojatnosti smrti i invaliditeta rudara u bivšoj Austriji u godinama 1904. do 1913.

Želio bih kazati još nekoliko riječi o gore spomenutoj Tablici smrtnosti slovenskog naroda. Kao što je gore rečeno, ta je tablica izrađena na osnovu statističkih podataka pučanstva bivše Dravske banovine u godinama 1931.—1933., koji su bili skupljeni po Općoj državnoj statistici. Ti su statistički podaci bili obrađeni, radi se kod toga o zamašnom poslu, kojim je rukovodio upravo Ivo Lah, i kod kojega se služio najsavremenijim statističkim metodama. Na raspolaganju mu je bio materijal veći nego je stajao na raspolaganju za izradbu poznatih austrijskih tablica M_S^G, iz razdoblja 1876.—1900. Zanimivo je, da su statistički podaci slovenskog pučanstva dali rezultate, koji su u nekom pogledu (srednje trajanje života) vrlo lijepo podudaraju s tablicama M_S^G, što dakako dalje ne iznenađuje, ali je ujedno dokaz, da se kod skupljanja podataka i kod obradbe tih podataka postupalo ispravno. Svakako treba pozdraviti tu našu prvu tablicu smrtnosti i slažemo se u tom pogledu i s Lahovim mišljenjem, da te računske osnovice uđu u naše buduće udžbenike matematike osiguranja, mjesto stranih tablica, koje su se do sada, jer drugih nije bilo, morale upotrebljavati.

Vjerujemo, da će ova knjiga dobro doći našim fakultetima i školama te je kao takovu i preporučujemo. Ivo Lah pako stekao je svojom tablicom smrtnosti velike zasluge. Poznato nam je, da je u štampi njegova monografija o tim računskim osnovicama u kojoj će biti opširno obrađen postanak tih tablica. Na to djelo, koje će izaći u hrvatskom, ruskom i francuskom jeziku, skrećemo već sada pažnju.

Dr. Vladimir Vranić

4%-TABLICE ZA RAČUN MATEMATIČKIH REZERVI DRŽAVNOG ZAVODA ZA SOCIJALNO OSIGURANJE. ZAGREB 1947.

Brigom *Državnog zavoda za socijalno osiguranje,* a u redakciji Ive Laha, ovlaštenog aktuara tog zavoda, izdane su tablice, koje služe za račun matematičkih rezervi tog zavoda. I ako bi nekome moglo izgledati, da su te tablice važne samo zbog internih računa u Državnom zavodu za socijalno osiguranje, u stvarnosti se radi o jednom djelu čija se vrijednost mora naročito istaći. Radi se o tablicama, koje su u cijelosti izračunate u Matematičkom odjelu Državnog zavoda za socijalno osiguranje na osnovu statističkog materijala tog zavoda. Poradi toga su te tablice specifično naše i daju nam mogućnost izračunavanja rezervi na osnovu naših iskustava. U knjizi je sadržano 10 tablica, koje služe za izračunavanje glavničnog pokrića ličnih i porodičnih renta grane nesreće, zatim za izračunavanje glavničnog pokrića ličnih i porodičnih penzija penzione grane i konačno za izračunavanje premijskih rezervi. Vrijednost knjige leži i u tome, da je dano opširno objašnjenje, kako su te tablice izračunate, tako da je ona upravo zbog toga lijep doprinos našoj, u toj grani dosta oskudnoj, matematičkoj literaturi. U tom objašnjenju Ivo Lah kaže nam među inim slijedeće:

»U uputstvu smo prikazali metode, kako se tablice imaju primjenjivati kod sastavljanja osigurateljno-tehničkih bilanca. Ova tehnička primjena tablica u praksi je manje više šablonska, pa se tablicama mogu poslužiti i neaktuari sve dotle, dok se normale t. j. vrst i količina davanja predviđene po Zakonu i Uredbi ne mijenjaju. U slučaju da bi se normale promijenile, treba vrijednost u tablicama preračunati. Za ovakovo preračunavanje pretpostavlja se da znamo, kakva kamatna stopa, kakve matematičke formule, kakve su statistike i vjerojatnosti kao i porodično stanje upotrebljeni u računu osigurateljnih vrijednosti u pojedinim tablicama. Drugim riječima treba znati, kako su tablice konstruirane. Na ovu vrlo važnu činjenicu bivši Središnji ured za osiguranje radnika, bivši Penzioni zavodi za namještenike i bivše Bratinske blagajne

nisu polagali nikakovu važnost. Tako se gotovo nikada nije znalo pa i danas se gotovo ništa ne zna, kako se došlo do različitih tablica, koje su se upotrebljavale u socijalnom osiguranju stare Jugoslavije. Metoda konstrukcije tablice mora biti ujedno i putokaz za buduće prikupljanje statističkih podataka za konstrukciju računskih osnovica, jer je ova metoda naročito važna za odgoj kadrova aktuara socijalnog osiguranja.«

U tim riječima najjasnije je obrazložena svrha ove knjige, koja će dobro poslužiti ne samo sadanjim i budućim aktuarima Državnog zavoda za socijalno osiguranje, već i onim matematičarima, koji se zanimaju za ovu veliku granu aktuarske matematike. *Dr. Vladimir Vranić*

Dr. Josip Lončar,

OSNOVI ELEKTROTEHNIKE

Knjiga I (1946, str. 304); knjiga II-1, 1946, str. 160; knjiga II-2, 1947, str. 161-368. Tisak N. Z. H.

Opsežnim ovim djelom dao je pisac prvi udžbenik opće elektrotehnike na hrvatskom jeziku. Djelo je zasnovano i izrađeno na višoj bazi, daje sliku današnjeg stanja elektrotehnike, namijenjeno je u prvom redu visokoškolskoj nastavi, a poslužit će kao priručnik i u praktičnom radu elektroinženjera. Pisac nije odabrao put, prema kojem bi osnovi elektrotehnike imali početi ondje, gdje prestaju teoretska i eksperimentalna fizika, nego je pošao od činjenice, da se poznavanjem osnova klasične i nove fizike dobiva dublji pogled u primjenjenu nauku, u elektrotehniku. Fizika je majka elektrotehnike, jer su prvi elektrotehnički strojevi, instrumenti, aparati i modeli nastali u starim primitivnim fizikalnim zavodima. Može se reći. da je elektrotehničko mišljenje u velikoj mjeri fizikalno mišljenje i prosuđivanje. Kako su matematičke operacije u elektrotehnici potrebno oruđe, pisac se obilno služio metodama više matematike i vektorske analize.

Prvi svezak ovog djela (knjiga I) obuhvaća tri velika poglavlja: A) mirni električki naboji; B) provodne električke struje; c) pojavi magnetskih polja.

U prvom poglavlju obrađuju se najprije pojavi, pojmovi i zakoni elektrostatike (opća svojstva elektrostatskog polja). Prikazani su i suvremeni nazivi o sastavu elektriciteta i materije (klasični pokusi Millikana, gibanje slobodnih elektrona u metalu, tumačenje vodljivosti metala t. zv. »elektronskim plinom« i t. d.).

Postoje djela opće elektrotehnike, u kojima se mimoilaze problemi nove atomistike i kvantne teorije. Prof. L. je već u početku iznio važnije stavke atomske i kvantne fizike.

Problem raznih sustava mjera i jedinica u elektrotehnici i u udžbenicima elektriciteta je kompliciran. Uporaba raznih sistema može lako dovesti do zabluda i izazvati poteškoće. U glavnom postoji slijedećih šest različnih sistema: 1. elektrostatski c—g—s; 2. elektromagnetski c—g—s; 3. praktički (tehnički) sistem s jedinicama metar, sekunda, kilogram;[1] 4. elektrofizikalni sistem s četiri osnovne jedinice: cm, sek., gram, pristli; 5. elektrotehnički sistem: metar, sekunda, njutn, kulon; 6. sistem po Giorgiju i Kalantarovu: metar, sekunda, amper, volt.[2] Prva tri sistema rade s tri osnovne jedinice, a preostali sa četiri. No već je Maxwell uvidio, da su za obuhvaćanje pojava u elektricitetu i magnetizmu nužne 4 nezavisne jedinice. U svoje vrijeme se Sommerfeld izrazio o tom pitanju riječima: činimo nasilje elektromagnetskim veličinama, ako ih prisiljavamo na Prokrustov krevet triju jedinica, dok nasuprot ovim veličinama dobro pristaje sistem sa 4 osnovne jedinice; ortodoksni broj

---

[1] Za silu 1 kg (kg*) postoji naziv kilopond (kp). Elektrostatska c—g—s jedinica za elektr. naboj dobila je ime »pristli«.

[2] Giorgijev sistem je kombinacija mehaničkih i električnih jedinica. Jedan je oblik ovog sistema s jedinicama M K S Ω.

triju jedinica, s kojima rade apsolutni sistemi, činio se opravdan u vrijeme, kad se mislilo, da se pojavi u elektricitetu mogu svesti na mehaničke elemente.

U ovom udžbeniku proveden je »zaokruženi sistem« s 4 osnovne jedinice: volt, amper, sek., cm ($V — A — s — cm$). Kod toga je došao u obzir zaključak internacionalne konferencije u god. 1935., prema kojem volt i amper nisu prijašnje internacionalne jedinice, već su kao »apsolutni« ili elektromagnetski volt odnosno amper definirane novim mjerama u skladu s jedinicama e. m. *c g s*-sistema. Ovaj je zaključak imao stupiti na snagu god. 1940., a proveden je konačno 1. I. 1948. Razlike između prijašnjih »internacionalnih« (iz god. 1908.) i novih »apsolutnih« jedinica je u svakom slučaju manja od 0,05%, pa se može u praksi zanemariti. Prelaz iz novog sistema na e. m. *c g s*-jedinice izvodi se faktorom 10^n, u kojem je n cijeli broj.

U novom elektrotehničkom izlazi dosljedno kao jedinica za silu

$$1\ VA\ s/cm = 10{,}2\ kg^* \ (10{,}2\ kp),$$

nazvana imenom njutn (newton), s oznakom N.

Za silu 10^7 dina predložen je naziv »sten«[3]. Prema francuskom zakonu od god. 1919., kojim se u tehniku uvodi metar — tona — sekunda — sistem, je 1 *sten* = 10^8 *dina* (102 *kp*). R. W. Pohl u svojem poznatom udžbeniku služi se jedinicom sile veliki din (makrodin) = 10^5 dina i jedinicom radnje veliki din-metar = 10^7 erga = volt-amper-sek. (džaul).

U člancima s naslovima »O v e k t o r u $\mathfrak{F}$ i s k a l a r u V, O vektoru $\mathfrak{D}$ i odnosu $\varepsilon = \mathfrak{D}/\mathfrak{F}$« obrađene su električne silnice i niveau-plohe, električna influencija i izvedeni su stavci potencijalne teorije.[4] Nadalje se uvode pojmovi toka (fluksa) vektora $\mathfrak{F}$ i $\mathfrak{D}$ (operacija **div**), izvode Laplaceova i Poissonova jednadžba i razmatra Faraday-Maxwellovo shvaćanje dielektrikuma (pomačne struge). U posljednjem dijelu ovog poglavlja obrađeni su kondenzatori te parcijalni kapaciteti radi potreba elektrotehnike.[5]

---

[3] Kako je problem električnih mjera i jedinica kompliciran, pokazao je F. Emde u ZS. f. d. phys. u. ch. Unterricht 48 (1935), str. 145 Kod promatranja raznih sistema dobiva se dojam, da se u njima više krije sistem koeficijenata, nego jedinica. U nekim formulama s empiričkim jedinicama (koje se predočuju izvjesnim predmetom odnosno aparatom) volt, amper . . . dolaze neprilični koeficijenti. Na pr. za dielektričnu konstantu vakuuma postoje formule

$$\varepsilon_0 = 0{,}0885 \cdot 10^{-12} \frac{A\,s}{V\,cm} = 0{,}0796 \frac{Pr^2}{erg.\ cm},$$

i to je razlog, da se u teoretskim djelima ove jedinice izbjegavaju i smatraju nekim bastardima e. m. *c g s*-sistema. U t. zv. apsolutnim sistemima je među ostalim neprilično, što u raznim dimenzionalnim formulama dolaze razlomci kao eksponenti, što se kapacitet i induktivitet mjere dužinom, pa bi bilo dosljedno, da se brzina mjeri omima (na pr. za brzinu svjetlosti u vakuumu izlazilo bi 30 Ω.

[4] Ovdje je sa $\mathfrak{F}$ obilježen vektor, sa V skalar električnog polja, sa $\mathfrak{D}$ vektor gustoće pomaka, sa ε dielektrična konstanta.

[5] Na osnovu potencijalne teorije izvedena formula, za jakost elektr. polja $\mathfrak{F} = d\mathfrak{P}/d\,Q'$ (gdje je $\mathfrak{P}$ vektor sile za naboj Q') pretpostavlja obzirom na el. st. *c g s*-jedinicu beskonačno malen naboj $d\,Q'$. Međutim, kako je najmanji električni naboj elementarni kvant, čini se, kao da s beskonačno malenim nabojem ne bi trebalo računati. Elektricitet po svojoj biti nije kontinuum. No klasični izvodi potencijalne teorije su stariji od mjerenja J. J. Thomsona i R. A. Millikana. S obzirom na svrhe elektrotehnike ostao je pisac kod klasičnih izvođenja.

U slijedećem poglavlju (B) dolaze članci o mehanizmu električnih struja, o električnom otporu, o zakonima za električnu struju[6], o metodama električnih mjerenja i mjeraćim instrumentima, o električnoj rasvjeti i fotometriji, o elektrolizi i akumulatorima, o elektrolitičkim ventilima i elektrolitičkim kondenzatorima.

Od obilnog materijala u (C) poglavlju spomenut ćemo Maxwellove jednadžbe, balistička mjerenja u području feromagnetizma (magnetski potenciometar i fluksmetar[7]), magnetski otpor (reluktancija), Ohmov zakon za magnetizam, rasipavanje i lom $\mathfrak{B}$-linija, magnetske karakteristike, Curie-ovu temperaturnu točku. Ukratko je prikazana ovdje i teorija feromagnetizma (molekularne struje u mikrokristalima, pojav Barkhausenovih šumova). Opsežnije je obrađen za praksu važan pojav histereze (Warburgov stavak, Steinmetzova formula i dr.). U posljednjem dijelu ovog poglavlja dolaze pojavi i pojmovi samoinduktiviteta i međusobnih induktiviteta s pripadnim teoretskim razmatranjima. Svezak se svršava s prikazom titrajnog kruga i poznatom Thomsonovom formulom. Ova knjiga sadržava 224 formule, 100 vježbi (zadataka) i ima 192 slike (sheme).

Drugi svezak O s n o v a se dijeli na poglavlja: D) strojevi istosmjerne struje; E) iz teorije izmjeničnih struja; F) pojavi međusobne indukcije (transformatori); G) strojevi izmjenične struje; H) pretvarači i usmjerivači; I) principi radiotehnike.

Poglavlje (D) donosi vrste i konstrukcije strojeva (generatora i motora, metode uzbuđenja i stavljanja u pogon, mjerenje stepena djelovanja i određivanje gubitaka u željezu i bakru, razmatranja o momentu vrtnje, o kritičnoj (graničnoj) brzini armature kod motora i dr.

Vrlo opsežno poglavlje (E) radi o teoriji i tehnici izmjeničnih struja. Najprije su protumačeni svi pojmovi, s kojima radi ova teorija. Kod rješavanja zadataka (napose u području mostova za izmjeničnu struju) primjenjena je simbolička metoda, koja radi s kompleksnom varijablom (vektor $\mathfrak{Z}$). Dalje slijede razmatranja o gubicima u nesavršenim kondenzatorima, o višefaznim sistemima izmjeničnih struja, o metodama njihova vezanja (simetrični i nesimetrični spoj u zvijezdu), o pomicanju 0-točke kod raznovrsnih opterećenja, te opis i funkcioniranje indikatora za slijed faznih vodiča.

U zanimljivom stavku raspravlja se o nesinusoidalnim (viševalnim, složenim) veličinama u tehnici izmjenične struje. Proučavanje ovih veličina vodi do Fourierovih redova. Jednostavne primjere za Fourierovu analizu imamo u slučaju, da grafički prikazana izmjenična veličina ima oblik pravokutnika i istokračnog trokuta. Računski je provedena analiza za jedan komplicirani oscilogram (str. 144). Najstarija mehanička aparatura za tu svrhu potječe od W. Thomsona. Moderni harmonički analizator radi sa sinhronim motorom, elektronskim cijevima i vatmetrom.

U vezi s ovim problemom stoji telefonija kroz duge kabelske vodove. Kod prenosa telefonskih struja, utjecajem razmještenih kapaciteta ovakvih vodova, iščezavaju viši harmonički titraji, i time nastaju jake distorzije u prenošenom govoru i glazbi. Uvrštenjem Pupinovih svitaka (pupinizirani kabli) uspjelo se kompenziranje ovih faktora, tako da je na vrlo velike daljine (stotine ili tisuće kilometara) moguć dobar prenos govora i glazbe.

---

[6] Ovdje je prvi put u našoj literaturi obrađena teoretska podloga Ohmova zakona.

[7] Za mjerenje magnetskog toka (fluksa) postoji vrlo uporabiv aparat (fluksmetar) po Grassotu. U principu je to balistički galvaiometar s maksimalnim umirenjem, baždaren u maxwell-uzvojima (Cambridge Instr. Co).

Teoretski i konstruktivno obrađen je problem transformatora u poglavlju (F). Vektorskim dijagramima prikazuju se prilike kod raznovrsnih opterećenja transformatora, razmatra se njegova energetička bilansa, opisuju se štedni (samo-)transformator, mjeraći transformatori za struju i za napetost pa i specijalni Scottov transformator, koji je nekada, u vrijeme Teslina rada, služio za prelaz iz dvofaznog u trofazni sistem.

U slijedećem poglavlju (G) obrađeni su strojevi za izmjeničnu struju, sinhroni generator i motor, asinhroni motor i motor s kolektorom, repulzioni motor. Za razne strojeve uz razne prilike (opterećenja) razmatraju se proizvedeni rotirajući magnetski tokovi, dijagrami struje, momenti vrtnje, proizvedena mehanička snaga (učin), reakciono djelovanje armature, reguliranje brzine i t. d. Spomenut ćemo ovdje uporabu fazne žarulje kod sinhroniziranja dvaju generatora i prividni porast napetosti, ako je generator nadovezan na dugi kabelski vod (t. zv. Ferrantijev efekt).

Poglavlje (H) obrađuje pretvarač sastavljen od 2 stroja (na pr. kombinacija od motora za izmjeničnu i generatora za stalnu struju), te pretvarač sa jednom (zajedničkom) armaturom i s kliznim kolobarima. U nastavku su prikazane sve vrste ispravljača (usmjerivača). Za tehničku praksu su danas najvažniji suhi ispravljači i ispravljači sa živinim parama.

U razmjerno kratkom posljednjem poglavlju prikazani su pregledno principi radiotehnike: elektromagnetski valovi, dipol, antena, titrajni krug, elektronska cijev, princip primanja moduliranih i nemoduliranih signala.

Knjiga II je ilustrirana sa 344 slike, sadržava 190 zadataka i 167 formula.

Opsežno djelo prof. L. s bogatim sadržajem i lijepom opremom je plod dugogodišnjeg rada. Izrađeno je savjesno i s ogromnim trudom, pa predstavlja za našu znanstvenu i stručnu literaturu lijep prinos i dobitak. Osim stručnjaka u elektrotehnici moći će se ovim djelom poslužiti i slušači prirodnih nauka na našim visokim školama.

D. Pejnović

ZADACI

Rješavajte zadatke i šaljite rješenje na adresu: Redakcija Glasnika, Marulićev trg 19, Zagreb.

Nije dovoljno da pošaljete samo rezultate pojedinih zadataka; važniji je opis postupka, kojim ste zadatak riješili.

Šaljite nam razne zadatke s pripadnim rješenjem!

P a ž n j a! *Ne rješavajte više zadataka na jednom te istom komadu papira! Pišite samo na jednoj strani papira! Ako se u rješenjima služite i slikama, nacrtajte sličicu na posebnom komadu tvrđeg papira, i to po mogućnosti tušem!*

*Hitno šaljite rješenja zadataka označenih zvjezdicom *, jer ćemo ta rješenja objaviti već u drugom narednom broju G l a s n i k a.*

87.* Otvorena posuda ima oblik kocke; leži li posuda na horizontalnoj ravnini pa ako je posuda napunjena vodom do $^4/_5$ svoje visine, za koliko stupnjeva treba kocku zakrenuti oko jednog njenog osnovnog brida (ivice) pa da iscuri trećina vode iz posude?

88.* Od 12 jednakih žica, od kojih svaka ima električki otpor r, sastavljen je kostur jedne kocke. Kolik otpor ima ovakvo tijelo, ako električna struja ulazi u jedan njegov ugao, a izlazi iz dijametralnog ugla?

---

* Zvjezdicom označene zadatke mogu riješiti i učenici srednjih škola, odnosno studenti prvog i drugog semestra.

89.* Ako prirodne brojeve 1, 2, 3, ..., n razvrstamo bilo kako u dvije skupine, kolik mora najmanje biti n, da u barem jednoj skupini budu sigurno sadržana tri broja, koja čine aritmetičku progresiju?

90.* Ako su dvije tangencijalne ravnine istostranična stošcu međusobno okomite, kolik je kut što ga zatvaraju izvodnice stošca duž kojih ravnine dodiruju stožac?

91.* Sjecišta visina svih trokuta, koji diraju zadanu parabolu, leže na ravnalici te parabole.

92.* Ako je $\sin x + \sin y = 2 \sin (x + y)$, onda je

$$tg \frac{x}{2} \cdot tg \frac{y}{2} = \frac{1}{3}, \quad ctg \frac{x}{2} + ctg \frac{y}{2} = 2\, tg \frac{x+y}{2}$$

93.* Želimo kupiti 13 komada peradi, i to purane, guske, patke i kokoši. Imamo na raspolaganju 2860 dinara. Izračunajte, koliko ćemo nabaviti od svake vrste, ako puran stoji 300 dinara, guska 240 dinara, patka 180 dinara i kokoš 100 dinara.

94. Promatrajmo funkciju

$$f(z) = \sqrt[3]{(z-1)^{2m} (z+1)^{5n}} + \sqrt[4]{z\,(z+1)^{2n} (z-1)^{5m}} + \\ + \sqrt[5]{(z-1)^{m+n} z^p},$$

gdje su m, n i p prirodni brojevi ili O. Štá je potrebno i dovoljno pa da beskonačno daleka točka ne bude kritična točka funkcije $f(z)$? Specijalno, odredi one m, n, p ispod 15, pa da ∞ ne bude točka grananja za funkciju $f(z)$.

95. Izračunaj plašt kosog a) stošca b) valjka kojemu je zadan: polumjer r baze, dužina d osovine i kut α što ga čini osovina sa bazom (Na pr. $r = 15$ dm, $d = 8$ dm, $\alpha = 17^\circ 13'$).

96. Koji dio ravnine prekrivaju središta svih elipsa, koje prolaze kroz tri zadane točke?

97. U vodiču s otporom od 3 Ω raste jakost električne struje od 2 do 4 ampera (kod čega je prirast jakosti struje proporcionalan sa vremenom), a za to potrebna napetost se mijenja od 6 do 12 volta. Neka se izračunaju srednje vrijednosti: a) za napetost; b) za jakost; c) za snagu (efekt) struje.

98. Kao što je poznato, specijalna teorija relativnosti uzima da se masa mijenja sa brzinom po zakonu

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

(m_0 masa mirovanja, c brzina svjetlosti). Uzevši da se masa elektrona mijenja po tom zakonu, odredite stazu elektrona naboja $(-e)$, koji se kreće oko jezgre naboja $(+Ze)$. Da li se izraz za Coulombovu silu, koja djeluje između elektrona i jezgre, može nadopuniti, tako, pa da se elektron i uz konstantnu masu kreće po istoj stazi?

99. $$\int_0^1 \frac{x^{2n}}{\sqrt[7]{x^3 (1-x^2)^2}}\, dx = ?$$

100. $$\iint x^n\, dy\, dz + y^n\, dz\, dx + z^n\, dx\, dy = ?$$

ako se integrira po površini kugle $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$.

RJEŠENJA ZADATAKA 17, 30, 31, 69*—73*.

17. U zadani krug unutar ili na periferiji smjesti poligon s n vrhova najveće moguće površine (dostavio Đ. Kurepa; riješio Fr. Neděla).

Ako je poligon konkavan, onda pomicanjem vrhova koji uzrokuju konkavnost, do spojnice ovih dvaju najbliižh vrhova, koji su vrhovi konkavnih unutrašnjih kutova a i preko nje, dobivamo konveksni poligon veće površine. To je pomicanje uvijek moguće, jer ako su dvije točke u ili na kružnici i njihova spojnica je cijelom svojom dužinom u kružnici.

Ako sad u unutrašnjosti konveksnog poligona odaberemo povoljnu točku i spojimo je sa svim vrhovima, tada pomicanjem vrhova po ovim spojnicama do kružnice, dobivamo poligon još veće površine.

Smjestimo li dakle ma kakav poligon s n vrhova unutar kruga, možemo mu pridružiti poligon veće površine, kojemu su vrhovi na kružnici.

Zadatak se dakle svodi na problem: **N a đ i p o l i g o n s n v r h o v a m a k s i m a l n e p o v r š i n e u p i s a n k r u ž n i c i.**

Pospajamo li sve vrhove sa središtem kruga O i označimo ih sa $N_1, N_2, N_3, \ldots$ pozitivnim redom kako slijede na kružnici a kutove $N_i\, O\, N_{i+1}$ označimo sa φ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ $(n + 1 \equiv 1)$, dobivamo za površinu poligona

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} r^2 \sin \varphi_i = \frac{1}{2} r^2 \sum_{i=1}^{n} \sin \varphi_i$$

kod čega mora biti ispunjeno

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i - 2\pi = 0 \qquad (*)$$

Da bi našli maksimalnu površinu, tražimo ekstrem funkcije

$$f \equiv \sum_{i=1}^{n} \sin \varphi_i - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i - 2\pi \right)$$

Nuždan je uvjet za ekstrem

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi_i} \equiv \cos \varphi_i - \lambda = 0, \text{ t. j. } \cos \varphi_i = \lambda, \text{ dakle } \cos \varphi_k = \cos \varphi_l,$$

$$\text{odnosno } \varphi_k = \varphi_l \text{ za sve } k, l = 1, 2, \ldots, n$$

što uvršteno u (*) daje

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \ldots = \varphi_n = \frac{2\pi}{n}.$$

Traženi poligon maksimalne površine imao bi dakle biti pravilan.

Površina n-terokuta dana je izrazom

$$P = \frac{1}{2} r^2 \sum_{i=1}^{n} \sin \varphi_i, \quad (\varphi_i \text{ iz } (0, \pi)\ i = 1, 2, \ldots n).$$

Kako je naša funkcija neprekidna za $0 \leq \varphi_i \leq \pi$ $(i = 1, 2, \ldots n)$, ona tu poprima svoj maksimum t. j. među onim n-terokutima upisanim u zadanu kružnicu ima jedan sa najvećom površinom. Tvrdimo da je to upravo onaj kojemu su sve stranice međusobno jednake (tada su i svi kutovi međusobno jednaki, pa je n-terokut pravilan).

Uzmimo da sve stranice maksimalnog n-kuta nisu međusobno jednake; tada su barem dvije susjedne stranice međusobno različite i neka su to stranice AB i BC. U tom slučaju možemo trokut ABC nadomjestiti trokutom veće površine ostavljajući preostali dio nepromijenjen. Dosta je mjesto tačke B uzeti tačku B' u kojoj simetrala dužine AC siječe luk $\overset{\frown}{AC}$. Trokut $AB'C$ ima veću površinu od trokuta ABC, jer oba imaju iste baze dok je visina prvog trokuta, koja je u isto vrijeme i udaljenost između tetive AC i tangente na kružnici u B', veća od visine drugog.

Iz toga što se svakom n - terokutu koji je upisan u kružnicu a nije pravilan može naći n - terokut veće površine slijedi da nijedan nepravilan n - terokut ne može biti maksimalan, pa dakle maksimalnu površinu ima pravilan n - terokut.

A možemo i ovako:

Kako je $f_{ik} \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_i \, \partial \varphi_k} = \begin{cases} -\sin \varphi_i & \text{za} \quad i = k \\ 0 & \text{za} \quad i \neq k \end{cases}$

to je Hesse-ova determinanta funkcije f:

$$D_n = \begin{vmatrix} f_{11} \; f_{12} \cdots f_{1n} \\ f_{21} \; f_{22} \cdots f_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ f_{n1} \; f_{n2} \cdots f_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin \frac{2\pi}{n} & & \text{\Large 0} \\ & -\sin \frac{2\pi}{n} & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \text{\Large 0} & & -\sin \frac{2\pi}{n} \end{vmatrix} = (-1)^n \sin^n \frac{2\pi}{n}$$

Kako je $\quad n > 2, \; \frac{2\pi}{n} < \pi; \; \sin \frac{2\pi}{n} > 0,$

to su D_n i sve glavne subdeterminante D_k, kojima lijevi gornji ugao leži u lijevom gornjem uglu od D_n pozitivne odnosno negativne, već prema tome, da li je n ili k paran odnosno neparan.

Forma drugih derivacija Tajlorovog razvoja je dakle definitno negativna, t. j. funkcija f, dakle i P poprima maksimum za

$$\varphi_1 = \ldots\ldots = \varphi_n = \frac{2\pi}{n}.$$

30. (T. 1 — 1946, str. 139; dostavio D. Pejnović, ispravno riješio J. Moser, Osijek).

Brzina v elektrona zadovoljava formulu

$$V \cdot e = \frac{m v^2}{2},$$

u kojoj je V napetost, a $\frac{e}{m}$ specifički naboj.

Iz gornje formule izlazi

$$v = \sqrt{2 V \cdot \frac{e}{m}}.$$

Kako je u elektromagn. $c - g - s -$ sustavu mjera

$$\frac{e}{m} = 1{,}8 \cdot 10^7, \quad 1 \text{ volt} = 10^8,$$

dobivamo za granične brzine elektrona vrijednosti

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot 20{,}01 \cdot 10^8 \cdot 1{,}8 \cdot 10^7} = 26{,}84 \cdot 10^7$$

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot 20{,}00 \cdot 10^8 \cdot 1{,}8 \cdot 10^7} = 26{,}83 \cdot 10^7.$$

Neodređenost brzine elektrona iznosi

$$v_2 - v_1 = \Delta v = 0{,}01 \cdot 10^7 \text{ (cm/sek)},$$

a neizvjesnost impulza

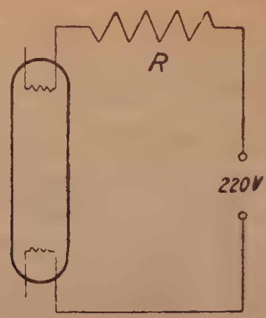
$$\Delta i = m \cdot \Delta v = 9 \cdot 10^{-28} \cdot 0{,}01 \cdot 10^7 = 9 \cdot 10^{-23}.$$

Iz Heisenbergove relacije

$$\Delta x \cdot \Delta i = h$$

izlazi $\quad \underline{\Delta x} = \frac{h}{\Delta i} = \frac{6{,}5 \cdot 10^{-27}}{9 \cdot 10^{-23}} = \underline{7 \cdot 10^{-5}} \; cm.$

31. Kadmijeva lučnica, kad normalno gori, troši 60 vata pri jakosti struje 2 amp. Priključuje se na 220 volt izmjeničnog napona preko predložnog otpora R (vidi shemu).



a) Koliki mora biti predloženi otpor R i u kojim se granicama smije mijenjati uslijed zagrijavanja, ako opterećenje lučnice smije biti najviše $\pm$ 5% propisanog opterećenja? Napon na lučnici je u tim granicama približno nezavisan o jakosti struje kroz lučnicu.

b) Ako se ta lučnica, kad normalno gori, stavi u magnetsko polje jakog elektromagneta, jakost struje spadne od 2 amp na 1·8 amp. Da li je ovakova upotreba lučnice dozvoljena?

Dostavio V. Lopašić (gledaj T. 1, p. 139).

a) Ako predložni otpor ima vrijednost R, a njime teče struja jakosti I, onda se u njemu troši snaga

$$W_R = RI^2.$$

Ako je Φ napon gradske mreže, onda ona dobavlja otporu i lučnici snagu

$$W = \Phi I.$$

Snaga W_l koja se troši u lučnici, diferencija je snage, koju dobavlja mreža i snage, koja se potroši u predložnom otporu. Dakle:

$$W_l = W - W_R.$$

Ako stavimo vrijednosti, dobivamo

$$W_l = \Phi I - RI^2$$

odnosno

$$R = \frac{\Phi I - W_l}{I^2}$$

Prema zadatku $\Phi = 220$ volt, $I = 2$ amp, $W_l = 60$ vat, pa za R izlazi

$$R = 95\ om.$$

Napon V na lučnici jednak je naponu mreže Φ umanjenom za pad napona na otporu R. Dakle

$$V = \Phi - RI.$$

Ako uvrstimo vrijednosti, izlazi

$$V = 30\ volt.$$

Da je tolik napon na lučnici, možemo zaključiti i odatle, što je snaga, koju lučnica troši

$$W_l = VI,$$

pa odatle opet dolazimo do gornjeg rezultata.

Budući da je napon na lučnici približno nezavisan o jakosti struje koja lučnicom teče, to su promjene snage, koja se u lučnici troši, t. j. opterećenja lučnice, razmjerne promjeni jakosti struje.

$$dW_l = V \cdot dI.$$

Podijelimo li ovu jednadžbu s izrazom za W_l, to dobivamo

$$\frac{dW_l}{W_l} = \frac{dI}{I}$$

Ako pretpostavimo, da je napon mreže stalan, tad su promjene jakosti električne struje određene promjenama otpora R, jer vrijedi

$$RI = \Phi - V = konst.$$

Odatle dobivamo

$$\frac{dI}{I} = -\frac{dR}{R},$$

pa je prema tome

$$\frac{dR}{R} = -\frac{dW_l}{W_l}.$$

Odatle slijedi, da se otpor R smije promijeniti za onoliko postotaka, za koliko je dozvoljena promjena opterećenja lučnice, t. j. prema zadatku za 5%.

b) Potrošak snage u lučnici je

$$W_l = \Phi I - RI^2,$$

gdje je $\Phi = 220$ volt, $R = 95$ om. Pri normalnoj jakosti struje $I = 2$ amp, izlazi za $W_l = 60$ vat. Ako se međutim smanji jakost struje od 2 amp. na 1·8 amp, premda su Φ i R ostali nepromijenjeni, uslijed toga, što smo lučnicu stavili u jako magnetsko polje, to onda za potrošak snage u lučnici u ovom slučaju izlazi

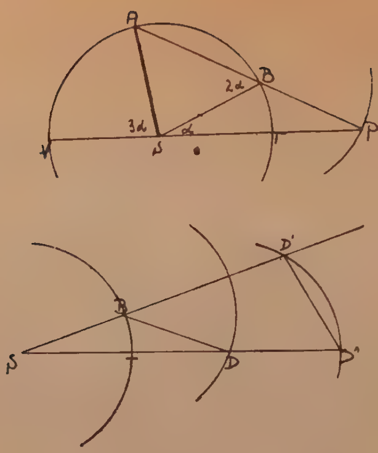
$$W_l = 220\ volt \cdot 1{\cdot}8\ amp - 95\ om \cdot (1{\cdot}8\ amp)^2 = 78{\cdot}2\ vat.$$

Ovo je opterećenje nedozvoljeno veliko, pa se prema tome lučnica ovako ne smije upotrijebiti.

69* (2, p. 86). Tetiva AB kružnice sa središtem u S produži se preko B do P tako, da je BP jednako polumjeru. Pravac kroz P i S siječe kružnicu u T i po drugi put u V. Dokaži, da je luk AV tri put veći nego luk BT.

Zadatak, zajedno s rješenjem, dostavio N. Išpirović; ispravno su ga riješili stud. S. Erdelji, Senta, Drago Skoko, uč. VII. raz. Duga Resa, uč. M. Momirski, Zrenjanin, stud. M. Loušin, Zagreb, i Zd. Blašković, Zagreb.

Rješenje: Trokut SBP je istokračan, pa je zato $\sphericalangle BSP = \sphericalangle BPS = \alpha$. Prema stavku o izvanjem kutu trokuta tada je $\sphericalangle ABS = 2\alpha$, a kako je i $\triangle ABS$ istokračan, to je i $\sphericalangle BAS = 2\alpha$. Primijenimo li isti stavak na $\triangle ASP$, to je $\sphericalangle ASV = \sphericalangle SPB + \sphericalangle BAS = \alpha + 2\alpha = 3\alpha$, a kako trostrukom kutu pripada na istoj kružnici i trostruki luk, to je time tvrdnja stavka dokazana.

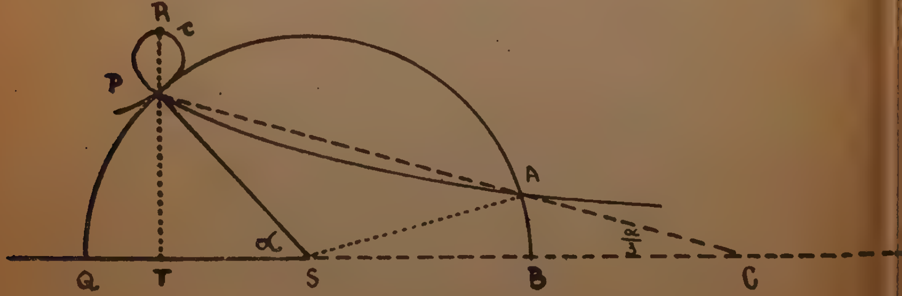


Sl. 1.

a) Poznato je da kružni luk možemo povišestručiti uzastopnim nanošenjem tetive, no na osnovi gornjeg stavka možemo potrostručiti dani kružni luk $\widehat{BT}$ i na ovaj način: Promjer $\overline{VT}$ produžimo preko T, a iz B opišimo kružnicu polumjera r, koja siječe pravac VT po drugi put u P. Točke P i B određuju pravac PB, koji kružnicu zadanog luka siječe po drugi put u A. Time je određen luk $\widehat{AV}$, koji je prema prednjem izlaganju tri puta veći od luka $\widehat{BT}$.

Ovakvo i slično rješenje dali su svi gornji rješavatelji.

b) Obrat gornje konstrukcije, t. j. problem dijeljenja bilo kojeg danog luka $\widehat{AV}$ u tri jednaka dijela (trisekcija kuta) nije moguće elementarno izvesti zato, jer nije moguće samo uz pomoć ravnala i šestara konstruirati tri točke A, B i P tako, da one leže na pravcu, da je uz to točka B na pripadnoj kružnici zadanog luka, točka P na produženju promjera $\overline{VT}$ i da je $\overline{BP} = r$, gdje je r polumjer danog kruga. Dublji uzrok te činjenice leži u tome, što se taj problem svodi na ireducibilnu jednadžbu trećeg stepena.



Sl. 2.

Već je Arhimed dao na osnovi gornjeg stavka ovu konstrukciju trisekcije luka $\widehat{AV}$ uz pomoć papirnate vrpce: Na rubu ravne papirnate vrpce označimo dvije čvrste točke B i P tako, da bude $\overline{BP} = r$. Zatim pomičemo točku B po periferiji kružnice i ujedno točku P po produženju promjera $\overline{VT}$, dok rub vrpce ne pokrije i točku A. Tada je

$$\sphericalangle BSP = \frac{1}{3} \sphericalangle ASV.$$

Trisekcija kuta je općenito izvediva pomoću šestara i ravnala, ako je dana još neka čvrsta krivulja na pr. hiperbola, konhoida ili Pascalov puž. Priloženu sliku konstrukcije uz pomoć dane konhoide poslao je S. Erdelji. Kut $\alpha = \sphericalangle PSQ$, koji treba razdijeliti na tri jednaka dijela, nacrtamo tako, da mu jedan krak SQ padne na asimptotu konhoide, a drugi krak SP da prolazi njezinom dvostrukom točkom P. Kružnica sa središtem u S a polumjeru $r = \overline{SP}$ siječe konhoidu još u točki A. Traženi kut je

$$\sphericalangle ASB = \sphericalangle ACB = \frac{\alpha}{3},$$

a to izlazi iz gornjeg stavka, jer je prema definiciji konhoide

$$\overline{AC} = \overline{PS} = r.$$

Dakako da je u posebnim slučajevima, na pr. kad je $\alpha = 45^\circ$, 90°, 135°, 180°, i t. d., trisekcija kuta i elementarno izvediva.

70.* Koliko rješenja ima jednadžba

$$\sqrt{px+q} + \sqrt{rx+s} = a$$

(Diskusija). Dostavio Stj. Škreblin; djelomično riješila Zd. Blašković; v. 2, p. 86.

Stavimo li

$$u = \sqrt{px+q}, \quad v = \sqrt{rx+s},$$

izlazi

$$u + v = l, \quad (u \geqq 0, \quad v \geqq 0).$$

Imamo

$$u^2 = px + q, \quad v^2 = rx + s$$

pa ako eliminiramo x

$$u^2 r - p v^2 + p s - q r = 0 \quad \text{i zbog} \quad v = l - n$$

$$f(u) \equiv u^2 (r - p) + 2 p l u - p l^2 + p s - q r = 0.$$

Samo one vrijednosti od u udovoljavaju zadatku, koje su veće ili jednake nuli i manje ili jednake l.

Jednadžba ima samo 1 rješenje, ako je

$$f(0)\, f(l) < 0 \quad \text{t. j.}$$

I $$(-p l^2 + p s - q r)\,(l^2 r + p s - q r) < 0.$$

Jednadžba ima 2 rješenja, ako su ispunjeni uvjeti (pogledaj u algebru za VI razred):

1) $D \geqq 0$ t. j. $p^2 l^2 - (r-p)(-p l^2 + p s - q r) \geqq 0$

2) $(r-p) f(0) < 0$

ili $(r-p)(-p l^2 + p s - q r) > 0$

3) $(r-p) f(l) > 0$

ili $(r-p)(l^2 r + p s - q r) > 0$

4) $0 < -\frac{p l}{r-p} < l,$

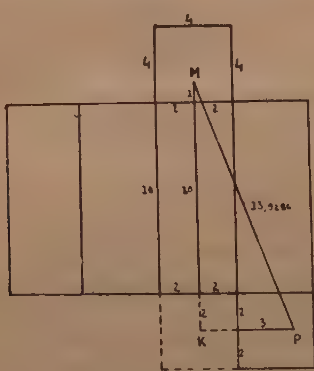
odakle izlazi (provjeri!) $p r < 0.$

Ako pređašnji uvjet (I) za 1 rješenje nije ispunjen, a također samo 1 od ova 4 uvjeta nije ispunjen, zadana jednadžba nema rješenja. Tako na pr.

jednadžba $\sqrt{3x+1} + \sqrt{-x+9} = 6$ ima 2 rješenja,

jednadžba $\sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+9} = 12$ ima jedno rješenje, dok na pr.

jednadžba $\sqrt{3x+1} + \sqrt{5x+9} = 1$ nema rješenja.

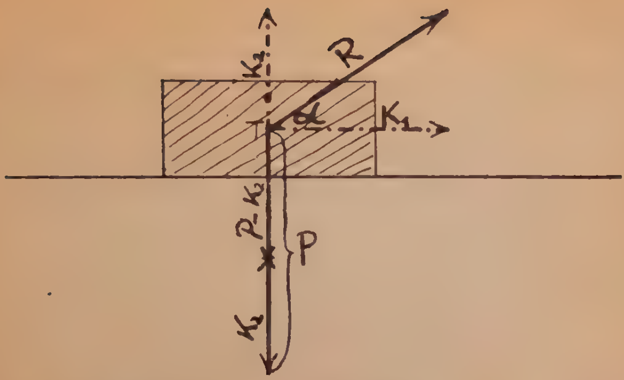


71.* (str. 86). Pauk i muha. Pauk progoni muhu po međašnjim plohama kvadra, koji je dug 10, širok 4 i visok 4 jedinice, a počiva na plohi 10×4. U času, kad se pauk nalazio na plohi 4×4 u točki, koja leži 3 jedinice nad sredinom donjeg osnovnog brida, a muha na suprotnoj plohi u točki, koja leži 1 jedinicu nad sredinom donjeg osnovnog brida, progovori muha: »Ne ću se maknuti s mjesta, pauče, i predat ću ti se na milost i nemilost, ako dođeš do mene putem, koji je kraći od 14 jedinica. »Pauk je vrstan geometar, i on je taj put našao. Nađi ga ti! (Dostavio Cviček, Zagreb, riješili: Bož. Jovanović, uč. VI. razr. gimn., Novi Sad i Drag. Skoko, uč. VII. razr. gimn., Duga Resa i D. Jurišić, stud., Zagreb).

Ako nacrtamo mrežu kvadra, i to onako, kao u priloženoj slici, najkraći put od *M* (položaj muhe) do *P* (položaj pauka) bit će predočen dužinom *MP*, a ta po Pitagorinu poučku iznosi

$$\sqrt{(1+10+2)^2 + (2+3)^2} \quad \text{t. j.} \quad \sqrt{194} \quad \text{dakle} \quad 13{,}93$$

što je svakako manje od 14 jedinica. Mrežu toga kvadra možemo doduše nacrtati na više raznih načina, ali u svakom od ostalih slučajeva dužina *MP* ne će biti manja od 14 jedinica, o čemu se lako možemo uvjeriti.



72.* (str. 86). Koji kut mora činiti pravac sile s horizontalnim smjerom, da za pokretanje tijela po horizontalnoj ravnini bude potrebna što manja sila, ako je koeficijent trenja ε? Dostavio N. Išpirović; dajemo doslovce rješenje što ga je poslao sedmoškolac Skoko iz Duge Rese.

Omjer komponente K_1 i pritiska tijela na plohu $P - K_2$ (jer P i K_2 djeluju suprotnim smjerovima) označuje koeficijent trenja ε:

$$K_1 : (P - K_2) = \varepsilon$$

$$R \cos \alpha = \varepsilon (P - R \sin \alpha)$$

$$R = \frac{P \varepsilon}{\varepsilon \sin \alpha + \cos \alpha}.$$

Stavimo li

$y = \varepsilon \sin \alpha + \cos \alpha$, bit će R_{min} za y_{max}, jer $P\varepsilon =$ konst.

Iz $\qquad y' = \varepsilon \cos \alpha - \sin \alpha = 0$

$$y''(\alpha_1) = -\varepsilon \sin \alpha_1 - \cos \alpha_1 < 0 \qquad \varepsilon = \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} = tg\, \alpha_1$$

$$\alpha_1 = arc\, tg\, \varepsilon$$

Prema tome kut pravca sile i horizontalnog smjera:

$$\alpha_1 = arc\, tg\, \varepsilon$$

$$R_{min} = \frac{P \varepsilon}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos \alpha}} = P\varepsilon \cdot \cos \alpha = P \varepsilon \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}}$$

$$R_{min} = P \varepsilon \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

73.* (str. 86). Koliku energiju daje udarac strijele, koja se u vremenu od $5 \cdot 10^{-6}$ sek. izbije kroz otpor 10 oma, ako struja izbijanja iznosi 100.000 amp.? Kolika cijena odgovara toj energiji, ako 1 kilovatsat stoji 5 Din? Dostavio D. Pejnović.

Označimo li sa I struju strijele, sa t trajanje izbijanja, onda je u otporu $r = 10$ oma potrošena energija

$$I^2 r t = 10 \cdot 100\,000^2 \cdot 5 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^5 \text{ vatsek.} \doteq \frac{1}{7} \text{ kilovatsata.}$$

Uz cijenu od Din 5.— po kilovatsatu dolazi na ovaj potrošak svota $\sim$ Din 0,7.

D. Blanuša

LE PLONGEMENT ISOMÉTRIQUE DES ESPACES ELLIPTIQUES DANS DES ESPACES EUCLIDIENS[1]

On connaît l'exemple[2] d'une surface algébrique représentant topologiquement le plan elliptique plongé dans un espace euclidien à quatre dimensions. Ce plongement, cependant, n'est pas isométrique.

Pour obtenir non seulement la connexion topologique du plan elliptique mais aussi la métrique de la géométrie elliptique, on peut se servir d'un espace ambiant euclidien à cinq dimensions. Voici la représentation paramétrique d'une telle surface:

$$u = \frac{R}{2} \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi, \tag{1a}$$

$$v = \frac{R}{2} \sin^2 \vartheta \cos 2\varphi, \tag{1b}$$

$$x = \frac{R}{2} \sin 2\vartheta \sin \varphi, \tag{1c}$$

$$y = \frac{R}{2} \sin 2\vartheta \cos \varphi, \tag{1d}$$

$$z = \frac{\sqrt{3}}{4} R \left(\frac{1}{3} + \cos 2\vartheta\right), \tag{1e}$$

x, y, z, u, v étant des coordonnées cartésiennes. En éliminant les paramètres ϑ, φ, on obtient

$$u^2 + v^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \frac{R^2}{3}, \tag{2a}$$

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{3}\left(z - \frac{R}{\sqrt{3}}\right)^2, \tag{2b}$$

$$u\,(y^2 - x^2) = 2\,xyv. \tag{2c}$$

L'équation (2a) montre que la surface se trouve sur une hypersphère. On peut montrer qu'on obtient les représentations isométriques de cette hypersphère sur elle-même par des rotations de cette hypersphère autour de son centre.

Pour généraliser ce résultat à un nombre quelconque de dimensions, désignons par x_{ik} $(i = 1, 2, \ldots, k+1;\ k = 1, 2, \ldots, n)$ les coordonnées rectilignes dans un espace euclidien à $\frac{n\,(n+3)}{2}$ dimensions. La représentation paramétrique d'un espace elliptique à n dimensions plongé isométriquement dans cet espace euclidien peut être mise sous la forme

$$x_{1s} = \frac{R}{2} \sin^2\varphi_n \sin^2\varphi_{n-1} \ldots \sin^2\varphi_{s+1} \sin 2\varphi_s \sin\varphi_{s-1} \ldots \sin\varphi_1, \tag{3a}$$

$$x_{rs} = \frac{R}{2} \sin^2\varphi_n \ldots \sin^2\varphi_{s+1} \sin 2\varphi_s \sin\varphi_{s-1} \ldots \sin\varphi_r \cos\varphi_{r-1}, \tag{3b}$$

$$x_{s+1,s} = \sqrt{\frac{s+1}{2s}}\,\frac{R}{2} \sin^2\varphi_n \ldots \sin^2\varphi_{s+1} \cdot \left(\frac{s-1}{s+1} + \cos 2\varphi_s\right), \tag{3c}$$

$$(1 < r \leq s; \qquad s = 1, 2, \ldots, n),$$

$\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ étant les paramètres.

---

[1] Coloque du 12 novembre 1947.

[2] *D. Hilbert* u. *Cohn-Vossen:* Anschauliche Geometrie, Leipzig u. Berlin 1932, p. 300.

En éliminant les paramètres on obtient

$$\sum_{s=1}^{r}\sum_{k=1}^{s+1} x_{rs}^2 = 2\,r\,(r+1)\left\{\frac{R}{2\,(n+1)} - \sum_{\sigma=r+1}^{n}\frac{x_{\sigma+1,\,\sigma}}{\sqrt{2\,\sigma\,(\sigma+1)}}\right\}^2, \tag{4a}$$

$$(r = 1, 2, \ldots, n),$$

$$\frac{4\,x_{r+1,\,s}^2 \sum_{k=1}^{r} x_{ks}^2}{\left(x_{r+1,\,s}^2 - \sum_{k=1}^{r} x_{ks}^2\right)^2} =$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{r} x_{kr}^2}{\left(\frac{r-1}{n+1}\frac{R}{2} + \sqrt{\frac{2\,r}{r+1}}\,x_{r+1,\,r} + \sum_{\sigma=r+1}^{n}\frac{(r-1)\,x_{\sigma+1,\,\sigma}}{\sqrt{2\,\sigma\,(\sigma+1)}}\right)^2} \tag{4b}$$

Pour $r = n$ l'équation (4a) devient une hypersphère sur laquelle se trouve l'espace elliptique.

Ici encore on peut montrer que les représentations isométriques de l'espace elliptique sur lui-même s'obtiennent par des rotations autor du centre et, au cas de n impair, des réflexions de l'hypersphère.

D. Blanuša

SUR LES PARADOXES DE LA NOTION D'ÉNERGIE[1]

Après quelques exemples instructifs concernant les notions d'énergie et d'impulsion et leurs modifications causées par la théorie de la relativité restreinte on a donné un exposé critique des relations fondamentales de la thermodynamique relativiste.

Dans son mémoire connu[2] M. Planck obtient les formules de transformations

$$Q = Q_0\,\alpha, \qquad T = T_0\,\alpha$$

pour la chaleur et la température, α étant l'abbréviation pour

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Son équation de départ

$$dA = v\,dG - p\,dV$$

pour une transformation élémentaire de l'état thermodynamique du rayonnement noir représente le bilan du travail mécanique, dA étant le travail des forces extérieures, v la vitesse, dG l'accroissement d'impulsion, p la pression et dV l'accroissement de volume.

[1] Colloque du 17 décembre 1947.

[2] M. Planck: Zur Dynamik bewegter Systeme, Ann. d. Physik 26 (1908), p. 1—34.

On critique la signification de dG dans cette équation en avançant l'interprétation que dG n'est que l'accroissement d'impulsion causé par les forces extérieures, tandis que l'accroissement total est composé de de ce dG et de l'impulsion $\frac{dQ}{c^2}\,\mathfrak{v}$ amenée par convection avec l'énergie de chaleur dQ. La conséquence en est que les formules de transformation pour la chaleur et la température deviennent

$$Q = \frac{Q_0}{\alpha}, \qquad T = \frac{T_0}{\alpha}.$$

On arrive au même résultat par des voies différentes. Par exemple, une discussion approfondie du cycle de Carnot considéré par Laue[3] fournit les mêmes formules, l'argumentation de Laue devant être modifiée.

Une autre idée esquissé dans cette conférence concerne le mouvement de l'énergie dans un corps en état de tension élastique. Considérons une barre soumise à une pression longitudinale p_0. La transformation du tenseur d'impulsion et d'énergie fournit les formules

$$w = \frac{1}{\alpha^2}(w_0 + \beta^2 p_0),$$

$$s = \frac{v}{\alpha^2}(w + p_0),$$

pour la densité d'énergie w et la densité d'impulsion s dans le système de référence par rapport auquel la barre se meut avec la vitesse v, β étant l'abbréviation pour $\frac{v}{c}$. Il en résulte la vitesse du mouvement d'énergie:

$$V = \frac{s}{w} = v\,\frac{w_0 + p_0}{w_0 + \beta^2 p_0} > v.$$

Donc, l'énergie se meut plus vite que le corps lui-même. Or, si l'on admet l'hypothèse qu'une grande partie de l'énergie, notamment celle qui est contenue dans les noyaux d'atomes, ne se meut pas plus vite que le corps, on est conduit à supposer que la partie $\frac{\beta^2}{\alpha^2}\,p_0$ de la densité d'énergie provenant de la pression p_0 est celle qui se meut plus vite. Sa vitesse devient

$$V = \frac{\dfrac{v\,p_0}{\alpha^2}}{\dfrac{\beta^2 p_0}{\alpha^2}} = \frac{c^2}{v}.$$

Ce serait donc la vitesse des ondes de de Broglie. On arrive au même résultat d'une autre manière. La force extérieure agissant de derrière de la barre fournit une certaine impulsion et un certain travail mécanique par seconde. Si l'on admet l'hypothèse que l'énergie mécanique fournie de cette force doit transporter par convection l'impulsion transmise à la barre par cette même force, on arrive également au résultat que cette énergie se meut avec la vitesse $\frac{c^2}{v}$. Il ne faut cependant pas perdre de vue qu'au cas d'une pression négative cette énergie aurait une densité négative.

A la fin de la conférence on a discuté les difficultés connues qui se présentent dans la théorie de la relativité générale en ce qui concerne la localisation de l'énergie du champ de gravitation.

---

[3] M. v. Laue: Die Relativitätstheorie I (1909), p. 236—237.

J. Goldberg

O PRINCIPU ODRŽANJA ENERGIJE

(Predavanje 5. XI. 1947.)

Prigodom 100-godišnjice egzaktne formulacije toga principa prikazan je udio J. R. Mayera, J. P. Joula i H. Helmholtza pri utvrđenju toga principa u zadnjoj fazi njegova razvitka 1840.—1847. Izložen je zatim u glavnim historijskim linijama razvitak naučnog mišljenja od 17. do 19. stoljeća, koji je doveo do ove sinteze. Taj se razvitak zbio u četiri idejne linije, koje su ideološki odraz društvenog razvitka od zanatstva preko manufaktura do mašinske industrije. Te su linije: 1. ideja perpetuuma mobile, kojega je nemogućnost empirički utvrđena; 2. problem »sile« tijela u gibanju, koji je u razvitku mehanike od Descartesa (mv) preko Leibnizove »žive sile« mv^2 doveo do izraza kinetičke energije $\frac{1}{2}mv^2$ i njezine ekvivalencije s radnjom; 3. prodiranje mehanističkog gledišta u ostalu fiziku, naročito u teoriju optike i topline, koje je dovelo do kinetičke teorije i mehaničkog ekvivalenta topline; 4. razvitak parnog stroja i njegove teorije, koji je Carnota doveo do praga principa energije. Na kraju kratko je ukazano na ulogu principa energije u fizici zadnjih 100 godina, te razvitak pojma energije naročito u Faraday-Maxwellovoj elektrodinamici, u teoriji relativnosti i u kvantskoj i atomskoj fizici.

Izvještaji

IZVJEŠTAJ O RADU MATEMATIČKO-FIZIČKE SEKCIJE HRV. PRIRODOSLOVNOG DRUŠTVA U GODINI 1947.

U godini 1947 bilo je održano 25 stručnih kolokvija matematičko-fizikalne sekcije i to:

1., 2. i 3. Dr. F. Havliček: Valna mehanika. (Ciklus od 3 predavanja 22. I., 29. I. i 12. II.).
4. A. Obuljen: Zagrebački fen. (26. II.).
5. Dr. ing. D. Blanuša: Binomni koeficijenti. (12. III.).
6. Dr. M. Hercigonja: Rotacija kružne ploče. (19. III.).
7. Ing. J. Ećimović: Moderne statističke metode i njihova primjena u praksi (26. III.).
8. Dr. V. Niče: Četverostruki fokusi ravninskih krivulja. (2. IV.).
9. R. Vernić: Određivanje orbita dvojnih zvijezda. (9. IV.).
10. Z. Janković: Suma potencija i redovi potencija recipročnih vrijednosti prirodnih brojeva. (16. IV.).
11. Dr. I. Supek: Osnovne jednadžbe elektronske teorije. (23. IV.).
12. R. Vernić: Fotometrijski dvojne zvijezde. (7. V.).
13. Dr. Đ. Kurepa: Teorija porasta. (14. V.).
14. Dr. M. Hercigonja: Kvantirani neeuklidski prostori. (21. V.).
15. Dr. V. Vranić: Nomografija u nauci i tehnici. (28. V.).
16. Dr. Đ. Kurepa: Pojam apstraktnih prostora. (4. VI.).
17. J. Mokrović: Fizikalni sastav zemlje. (11. VI.).
18. Dr. S. Bilinski: Dinamika kumulonimbusa. (29. X.).
19. Dr. J. Goldberg: O principu održanja energije. (5. XI.).
20. Dr. ing. D. Blanuša: Eliptični prostori smješteni u euklidskim. (12. XI.).
21. A. Obuljen: Trideset godina geofizike u SSSR. (19. XI.).
22. a) D. Mayer: Nekoliko riječi povodom smrti fizičara M. Plancka.
    b) Dr. Havliček: Najnoviji razvitak fizike elementarnih čestica.
    c) Dr. Đ. Kurepa: Funkcionalno pojimanje realnog broja prema Kolmogorovu. (26. XI.).
23. M. Sevdić: Život i rad A. N. Krilova. (3. XII.).
24. Dr. V. Vranić — dr. Đ. Kurepa: Trideset godina matematike u SSSR. (10. XII.).
25. Dr. ing. D. Blanuša: O paradoksima pojma energije. (17. XII.).

U nekim od ovih kolokvija predavači su iznosili rezultate vlastitih istraživanja, u nekima referate o pojedinim važnijim specijalnim područjima nauke i rezultate novijih istraživanja, a u nekim su opet bile osvijetljene važnije prekretnice u historiji pojedinih ekzaktnih nauka. Na taj način je u tim kolokvijima došao do izražaja najznatniji dio rada Mat.-fiz. sekcije. Popularna predavanja sekcija doduše nije priređivala jer se može smatrati, da pitanje popularizacije nauke — nakon potpune organizacije Centralnog narodnog sveučilišta — spada u njegovo područje rada, ali su zato u njemu mnogi članovi održali više popularnih predavanja. Isto tako ove godine nisu više bili održavani debatni sastanci, jer je rad na metodičko-pedagoškom usavršavanju srednjoškolskih nastavnika preuzeo Sindikalni savez prosvjetnih radnika preko radnih sastanaka nastavnika pojedinih grupa predmeta.

U Sekciji je bilo pokrenuto i pitanje izdavanja prijevoda knjige M. Born: Einsteinova teorija relativnosti. Prevođenje je preuzeo i izveo dr. ing. D. Blanuša i knjiga će izaći početkom 1948. u izdanjima Hrv. prir. društva.

Matematičko-fizička sekcija zajedno s Astronomskom sekcijom izdala je drugi svezak Glasnika matematičko-fizičkog i astronomskog i to kao tri dvobroja i jedan četverobroj — svega 16 araka. Uza sve nastojanje redakcionog odbora da pojedine sveščice izađu na vrijeme, nije se u tom moglo potpuno uspjeti, jer je štamparija bila preopterećena poslom.

Tokom godine održano je 9 odborskih sjednica. Glavna godišnja skupština Mat.-fiz. sekcije održana je 19. X.; izabran je ovaj odbor:

Dr. J. Goldberg za pročelnika, dr. ing. D. Blanuša za zamjenika pročelnika, dr. S. Bilinski za tajnika, a za odbornike: V. Deduš, V. Devidé, dr. V. Havliček, dr. M. Hercigonja, V. Jirasek, dr Đ. Kurepa, M. Lukšić, D. Mayer, dr. Ž. Marković, A. Obuljen, M. Sevdić i dr. V. Vranić.

Tajnik: Dr. S. Bilinski

RAD ASTRONOMSKE SEKCIJE

Tokom 1947. godine kretao se rad Astronomske sekcije uglavnom oko zvjezdarnice. Kao i prošlih godina bila je zvjezdarnica redovito otvorena za građanstvo svake subote, kad je prije samog motrenja kroz dalekozore održano svaki put kratko predavanje. Uvedeno je kao novost, da posjetioci svoja eventualna pitanja napišu i bace u određenu kutiju, pa se na ta pitanja slijedeće subote daju odgovori. Na taj način se posjetioci privikavaju da češće dolaze na zvjezdarnicu, kako bi čuli odgovore na postavljena pitanja. Osim subote otvorena je zvjezdarnica još dva dana i to za posjete srednješkolaca, koji u školi uče astronomiju i za veće grupe članova sindikata ili pripadnika J. A. Ukupno je samo u posljednja tri i po mjeseca bilo 3200 posjetilaca.

Za aktivnije članove održava se tri puta tjedno kurs sferne astronomije i poznavanja astronomskih instrumenata, koji posjećuje 25 omladinaca. Tečajci se i praktički vježbaju, pa na primjer koriste sekstant društva, da određuju visine nebeskih objekata.

Osim na zvjezdarnici održavana su i predavanja po raznim sindikalnim podružnicama i jedinicama J. A. pa se i na taj način popularizira rad Sekcije i Hrvatskog prirodoslovnog društva uopće. Članovi sekcije dali su i priloge za časopis »Prirodu« i »Glasnik matematičko-fizički i astronomski«, premda taj rad nije bio onako opsežan kao na zvjezdarnici.

Potrebno je naglasiti da je rad na zvjezdarnici, koja je sređena, a prostorije proširene zahvaljujući susretljivosti uprave škole, mogao biti tako plodan samo zbog ustrajnog i požrtvovnog rada polaznika tečaja, među kojima su se osobito istakli srednjoškolci Lončar Darko i Tomljenović Josip. Organizator svega tog rada u proteklom vremenskom periodu bio je prof. J. Golubić, koji je vodio tečaj i neprekidno održavao predavanja. Potrebno je spomenuti da je dobrovoljnim radom drugova obrtnika Blaževića i Kozara popravljena kupola i dotjeran veliki dalekozor.

L. R.

SADRŽAJ - СОДЕРЖАНИЕ
TABLES DES MATIERES - CONTENTS

ČLANCI

СОДЕРЖАНИЕ (СТАТЬИ)

TABLES DES MATIERES (ARTICLES)

CONTENTS (ARTICLES)

UGAO ZA SVAKOGA - PA3HOE - MELANGES - MISCELLANY

22—36, 77—83, 120—135, 185—256.

ISPRAVCI

Str. 137, u zad. 81, treba mjesto *kilovat* pisati *kilovatsat*.

Str. 138, u rješenju zad. 3, treba koeficijent od

$4x$ odnosno $(4x)^k$ glasiti: $-\binom{-\frac{1}{2}}{1}$ odnosno $(-1)^k \binom{-\frac{1}{2}}{k}$.

PREGLED IZRAĐENIH ZADATAKA U SVESKU 2

Broj zadatka, svezak i strana na kojem je zadatak štampan	Zadao-la	Riješio-la
3 (1, 43; 138)	D. Blanuša	
6 (1, 44; 87)	Vl. Devidé	Stj. Bilinski, B. Zelenko.
10 (1, 92; 90)	D. Blanuša	Fr. Nedêla, B. Grünbaum, V. Devidé, B. Zelenko.
12 (1, 92; 138)	V. Niče	Fr. Nedêla, D. Blanuša, N. Išpirović, P. Dominik.
17 (1, 93; 240)	Đ. Kurepa	Fr. Nedêla.
26 (1, 138; 138)	D. Blanuša	D. Cvelić, N. Išpirović, V. Devidé, M. Živković, M. Loušin, I. Lah, St. Bilinski.
29 (1, 139; 41)	Z. Janković	N. Išpirović, St. Malčić, J. Moser.
30 (1, 139; 241)	D. Pejnović	J. Moser.
31 (1, 139; 242)	V. Lopašić	Fr. Nedêla, M. Vučkić.
32 (1, 139; 43)	D. Pejnović	J. Moser, J. Golubić.
34 (1, 184; 44)	D. Cvelić	M. Nikolić, Z. Ruževič, Gospodnetić, M. Brčić-Kostić, D. Skoko, M. Krajnović, Z. Bulatović, Z. Blašković, S. Erdelji, N. Išpirović.
35 (1, 184; 139)	D. Blanuša	D. Cvelić, Z. Bulatović, Z. Blašković, V. Jirasek, N. Išpirović, S. Bilinski.
36 (1, 184; 141)	M. Kostić	N. Išpirović.
37 (1, 184; 142)	Đ. Kurepa	M. Nikolić, N. Išpirović, J. Blazina, Fr. Nedêla, M. Živković.
41 (1, 185; 143)	D. Pejnović	T. Moser.
42 (1, 185; 45)	D. Pejnović	V. Jirasek, J. Golubić.
43 (1, 185; 46)	D. Pejnović	V. Jirasek, J. Golubić.
45 (1, 185; 144)	D. Pejnović	D. Cvelić, D. Skoko, J. Moser.
46* (1, 228; 46)	Đ. Kurepa	K. Prpić, M. Šilović, Kuljaš, P. Smorodski, V. Cvitaš, D. Skoko, N. Došek, Z. Blašković, S. Kurepa, S. Erdelji, M. Loušin.
47* (1, 228; 46)	Đ. Kurepa	D. Skoko, Z. Blašković, K. Prpić, N. Došek.
48* (1, 228; 47)	B. Grünbaum	P. Smorodski, Z. Blašković, S. Erdelji.
54* (1, 229; 93)	D. Pejnović	N. Došek.
56* (2, 37; 94)	Đ. Kurepa	Z. Blašković, M. Loušin, J. Blazina, N. Došek, D. Cvelić, D. Skoko.
57* (2, 37; 94)	Đ. Kurepa	M. Živković, M. Loušin, D. Cvetić, A. Grossmann.
58* (2, 37; 95)	Đ. Kurepa	M. Živković, Z. Blašković, J. Blazina.
67* (2, 38; 95)	D. Pejnović	N. Došek, D. Cvelić.
69* (2, 86; 243)	N. Išpirović	St. Erdelji, stud., D. Skoko, đak, M. Momirski, đak, M. Loušin, stud.
70* (2, 86; 245)	Stj. Škreblin	Zd. Blašković.
71* (2, 86; 246)	Cviček	B. Jovanović, đak, D. Skoko, đak, D. Jurišić, stud.
72* (2, 86; 247)	N. Išpirović	D. Skoko, đak.
73* (2, 86; 247)	D. Pejnović	

SURAĐUJTE U GLASNIKU!

U Glasniku ima mjesta za svakoga: počam od đaka i studenta pa do profesora, inženjera i naučenjaka. Stoga surađujte u Glasniku i šaljite nam članke, člančiće, zadatke, probleme, rješenja zadataka i t. d. Naročito molimo da nam šaljete zadatke i primjedbe iz svagdašnjeg života; ne bude li koji od tih zadataka štampan u Glasniku, to ne znači da oni ne će biti ipak iskorišteni (na pr. za kartoteku zadataka).

Pišite nam svoja zapažanja o novim knjigama.

Šaljite nam svoje primjedbe i sugestije o Glasniku.

ŠIRITE GLASNIK!

Svaka bi škola morala biti pretplaćena na Glasnik. U svakoj bi školi trebalo na vidnom mjestu objaviti zadatke iz Glasnika, označene zvjezdicom, da bi ih đaci upoznali i rješavali.

Širite Glasnik! Glasnikom se moramo više i bolje koristiti. Time ćemo dati poleta mlađem naraštaju i omogućiti da se što više otkriju i razviju skrivene nadarenosti!

Treći svezak Glasnika, t. j. tom za 1948 godinu, izaći će do konca februara 1949. Godišnja je pretplata Glasnika 120 dinara. Molimo, da pretplatu za 1948 godinu pošaljete priloženom čekovnom uplatnicom. Broj 4—90603180 čekovnog računa kod Poštanske štedionice vrijedi i za ostale narudžbine kod Hrv. prirodoslovnog društva.